

Mise en évidence d'un variant ; analogie avec un pixel-art coloriés en plusieurs étapes.

Sur le quadrillage d'une feuille à petit carreau, au départ, certaines cases sont coloriées (noircies).

Chaque case du quadrillage possède **quatre** cases voisines : ce sont les cases mitoyennes par un côté, c'est-à-dire, la case de droite, celle de gauche, celle du dessus et celle du dessous.

A chaque étape, on colorie les cases en appliquant la règle de coloriage suivante :

Règle: une étape de coloriage

Dans chaque case non-coloriée, on indique le nombre de cases voisines déjà coloriées.

On colorie une case si, au moins, 2 cases voisines sont déjà coloriées. Sinon, on efface son coloriage.

La question est la suivante :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Dans un damier à 8 lignes et 8 colonnes (64 cases), peut-on trouver 7 cases qui permettent de colorier tout le damier ? (sous-entendu, après un certain nombre d'étapes de coloriages successives).

La réponse est NON. Voici une explication.

On appelle périmètre, le nombre total de côtés entre deux cases voisines dont l'une est coloriée et pas l'autre (chaque côté est compté une fois pour les deux cases en question).

Nous allons voir que ce périmètre T peut, à chaque étape, ou bien diminuer de 2, ou bien diminuer de 4, ou bien rester le même.

Étudions comment peut évoluer ce nombre (le périmètre des cases coloriées) au cours des étapes de coloriages successives. Une case peut avoir, ou bien 0, ou bien 1, ou bien 2, ou bien 3, ou bien 4 voisines (déjà coloriées).

Dans les deux premiers cas, la case en question ne sera pas coloriée à l'étape suivante; sa contribution au périmètre ne change pas. Si elle a 2 voisines coloriées, les deux côtés mitoyens ne contribuent plus au nouveau périmètre qui diminue donc de 2 mais les deux autres côtés de cette case nouvellement coloriée augmentent le périmètre de 2 ce qui fait un bilan de 0 et ne change donc pas la contribution au périmètre.

Si elle a 3 voisines déjà coloriées, les 3 côtés mitoyens abaissent le périmètre de 3 et le dernier côté l'augmente de 1 ; bilan, une baisse de 2 du périmètre. Enfin, si la case a 4 voisines coloriées, le périmètre baisse de 4. Conclusion : A la suite d'une étape de coloriage, le périmètre baissera de 0, 2 ou 4.

Supposons que, sur notre damier, 7 cases aient été coloriées. Prouvons qu'on ne pourra pas colorier tout le damier 8×8 après plusieurs étapes de coloriage. Le périmètre d'une configuration de 7 cases est au maximum égal à $4 \times 7 = 28$. Le périmètre du damier entièrement colorié est de $4 \times 8 = 32$. Nous avons vu qu'au cours de coloriages, ce périmètre ne pouvait que baisser. Ceci implique que la configuration du damier entièrement colorié ne pourra être atteinte à partir d'une configuration de 7 cases coloriées seulement. On a utilisé ici un nombre attaché à chaque étape des coloriages du damier : le périmètre des cases coloriées. Ce nombre est appelé un **variant**.