Une définition axiomatique de la droite

Aziz El Kacimi Alaoui

1. Soit ℓ une *ligne* commençant au point O (*origine*) et se terminant au point E (*extrémité*) distinct de O. C'est le lieu d'un mobile qui se balade dans l'espace du point O au point E. Pour tout $M \in \ell$, la ligne ℓ_M commençant en O et se terminant en M est appelée *sous-ligne* de ℓ. On suppose que la ligne ℓ :

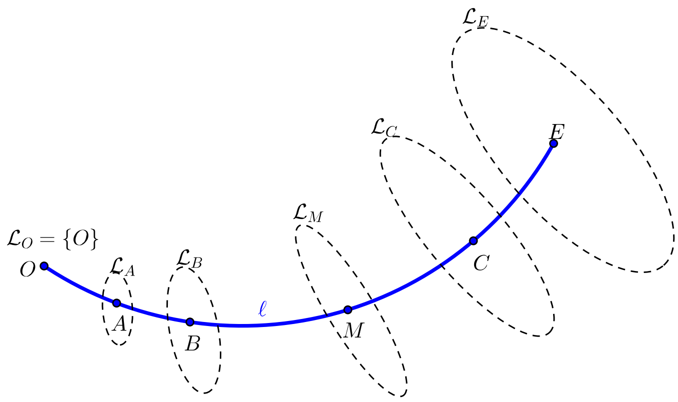
- est une ficelle déformable mais *non élastique* ;
- que l'origine O est fixe (immobile) ;
- et qu'un point la décrivant n'occupe jamais deux fois la même position.

2. Soit M un point de ℓ. On tient la ficelle en M et on tire dessus en s'éloignant de O jusqu'à la limite permise (par la non élasticité de la ficelle). On dit que ℓ est *tendue* en M. Le point M va alors prendre place dans une partie de l'espace qu'on notera $\mathcal{L}_M$: elle est constituée de toutes les positions possibles de M obtenues par ce procédé.

La partie $\mathcal{L}_M$ sera aussi appelée *sphère* de *centre* O associée à M.

Il est à remarquer que si ℓ est tendue en $M \in \ell$ alors la ligne ℓ_N est tendue en N pour tout $N \in \ell_M$.

Bien entendu, quand $M = O$ la partie $\mathcal{L}_O$ est réduite au point O. D'autre part, si M et N sont deux points distincts de ℓ, les deux parties $\mathcal{L}_M$ et $\mathcal{L}_N$ sont disjointes. On note $\mathcal{L}$ la réunion de toutes les sphères $\mathcal{L}_M$ pour M variant dans ℓ (*cf.* dessin ci-dessus).



Cette figure ne représente pas la situation telle qu'on peut la voir dans la réalité.
Elle symbolise la ligne ℓ avec la famille de sphères $\{\mathcal{L}_M\}$ qu'on lui a associée.

On a une projection naturelle $\tau : \mathcal{L} \longrightarrow \ell$ définie comme suit. Si $m \in \mathcal{L}$, il existe une unique sphère $\mathcal{L}_M$ qui le contient ; on pose alors $\tau(m) = M$. On dira :

- que la projection $\tau : \mathcal{L} \longrightarrow \ell$ est une *fibration*,
- que la ligne ℓ est la *base* de τ et que $\mathcal{L}$ est son *ensemble total*.

Pour tout $M \in \ell$, la sphère $\mathcal{L}_M = \tau^{-1}(M)$ est la *fibre* au-dessus de M.

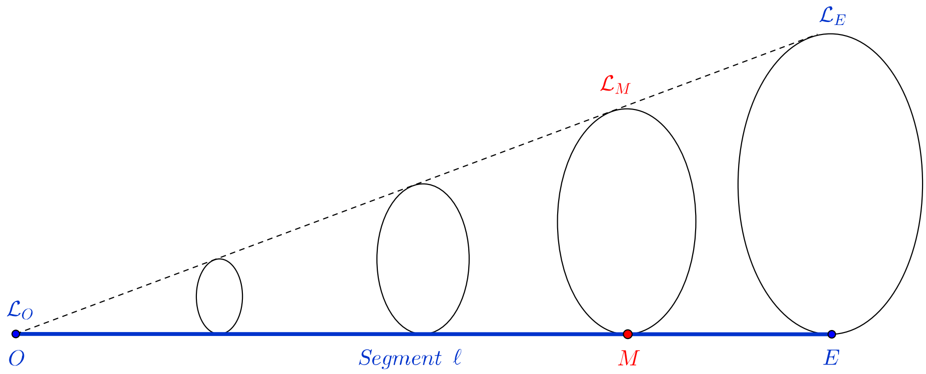
3. Une *section* de la fibration τ est une application $\ell \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}$ vérifiant $\tau(\sigma(M)) = M$ pour tout $M \in \ell$; ceci implique de façon évidente $\sigma(M) \in \mathcal{L}_M$.

Si on tend ℓ au point E, on la tend aussi en tout point qui le précède (comme on l'a déjà fait remarquer), c'est-à-dire en tout $M \in \ell$. On obtient ainsi une section particulière de τ qu'on appellera *relèvement* de ℓ à $\mathcal{L}$; son image est aussi une ligne partant de O.

Par l'*axiome du choix*, l'ensemble $\Sigma(\ell, \mathcal{L})$ des sections de τ n'est pas vide, c'est-à-dire : *dans chaque sphère $\mathcal{L}_M$ (avec $M \in \ell$), on peut choisir un, et un seul élément.*

Le rôle d'une section $\sigma \in \Sigma(\ell, \mathcal{L})$ est de remonter la ligne ℓ en une partie - qui n'est pas forcément une ligne - de l'ensemble $\mathcal{L}$.

4. Définition. *Une ligne ℓ commençant en O et se terminant en E est un* ***segment*** *$[OE]$ si tout point M de ℓ est aussi un élément de la fibre $\mathcal{L}_M$ et n'est dans aucune autre fibre $\mathcal{L}_N$ pour $N \neq M$.*



Ce dessin est moins vague que le précédent.
Il illustre bien la famille de sphères $\{\mathcal{L}_M\}$ associée à ℓ.

Un relèvement de la ligne ℓ à $\mathcal{L}$ donne une manière de la *redresser* en un segment, toujours d'origine O et ayant son extrémité dans $\mathcal{L}_E$.

Nous avons donc la notion de segment, d'*origine* O et d'*extrémité* E ; nous le noterons $[OE]$. On aura alors celle de *droite* (OE) par le :

5. Deuxième postulat d'Euclide. *Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.*

Université Polytechnique Hauts-de-France
CERAMATHS (Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques)
F-59313 Valenciennes Cedex 9, France
aziz.elkacimi@uphf.fr
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/