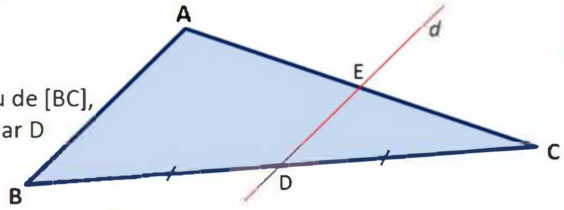
T-140 Si une droite, parallèle à un côté d'un triangle, passe par le milieu d'un deuxième côté de ce triangle, alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.

Démonstration :

soit un triangle ABC. J'appelle D le milieu de [BC], et *d* la droite parallèle à (AB) qui passe par D (**d'après M-8**, elle existe).



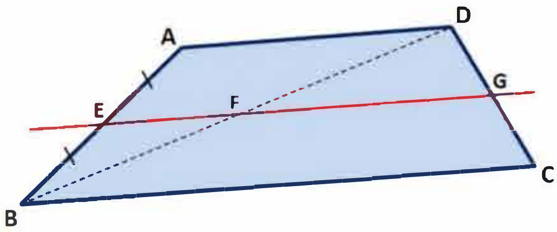
D'après M-16, *d* coupe [AC], en un point que j'appelle E.

Appelle H le milieu de [AC] (non, tu ne sais pas encore si c'est E !) : **d'après T-138**, (DH) est parallèle à (AB)… Mais (DE) l'est également, et **M-8 t'affirme** qu'il n'existe qu'une seule droite passant par D et parallèle à (AB).
Donc (DE) = (DF), et **d'après T-1**, cette droite a un point commun unique avec (AC)… alors E = F, et E est bien le milieu de [AC] !

T-151 Si une droite, parallèle aux bases d'un trapèze, passe par le milieu d'un troisième côté de ce trapèze, alors cette droite passe par le milieu du quatrième côté.

Démonstration :

soit un trapèze ABCD, de bases [AD] et [BC].
J'appelle E le milieu de [AB],
F le point commun à (BD)
et à la droite parallèle à (BC), passant par E,
et enfin G le point commun (EF) et à (CD).



Observe ABD et (EF) :

E est le milieu de [AB] et (EF) est parallèle à (AD) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-140**, F est le milieu de [BD].

Observe maintenant BCD et (FG) :

F est le milieu de [BD] et (FG) est parallèle à (BC), donc, toujours **d'après T-140**, G est bien le milieu de [CD].

Ce théorème va bien entendu me servir à démontrer le suivant :

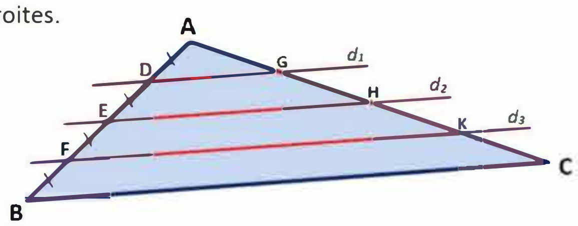
T-152 **« théorème de Thalès », première version** :

si un ensemble de droites, toutes parallèles à un même côté d'un triangle, sépare un deuxième côté de ce triangle en des segments de même longueur, alors cet ensemble de droites sépare également le troisième côté en des segments de même longueur (différente, en général, de celle des premiers segments).

Démonstration :

pour commencer, un exemple avec trois droites.

Soient un triangle ABC
et trois droites, d_1, d_2 et d_3,
coupant [AB] respectivement en D, E et F,
parallèles à (BC)
et telles que AD = DE = EF = FB.



J'appelle G le point commun à d_1 et à [AC] (**d'après M-16**, d_1, qui ne coupe pas [BC], coupe [AC]),
H le point commun à d_2 et à [AC], et K celui commun à d_3 et à [AC].

Observe AEH et (DG) :

D est le milieu de [AE] et (DG) est parallèle à (EH) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-140**, G est le milieu de [AH] : AG = GH.

Observe maintenant DFKG et (EH) :

d'après D-115, DFKG est un trapèze.
E est le milieu de [DF] et (EH) est parallèle à (FK) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-151**, H est le milieu de [GK] : GH = HK.

Observe enfin EBCH et (FK) :

d'après D-115, EBCH est un trapèze.
F est le milieu de [EB], (FK) est parallèle à (BC), donc, **d'après T-151**, K est le milieu de [HC] : HK = KC.

Tu viens de démontrer que AG = GH = HK = KC !

Et si ce ne sont pas <u>trois</u> droites qui coupent [AB] ?

Si [AB] n'est coupé que par une droite, tu reviens à T-140 ;

si [AB] est coupé par deux droites, considère que dans l'exemple précédent, les points B et C sont en réalité les points que j'ai appelés F et K !

Et si [AB] est coupé par plus de trois droites, il te suffit de répéter l'étape « trapèze » autant de fois que nécessaire pour atteindre finalement [BC], en avançant à chaque fois d'un segment de plus sur [AB] … et en utilisant à chaque fois T-151 !