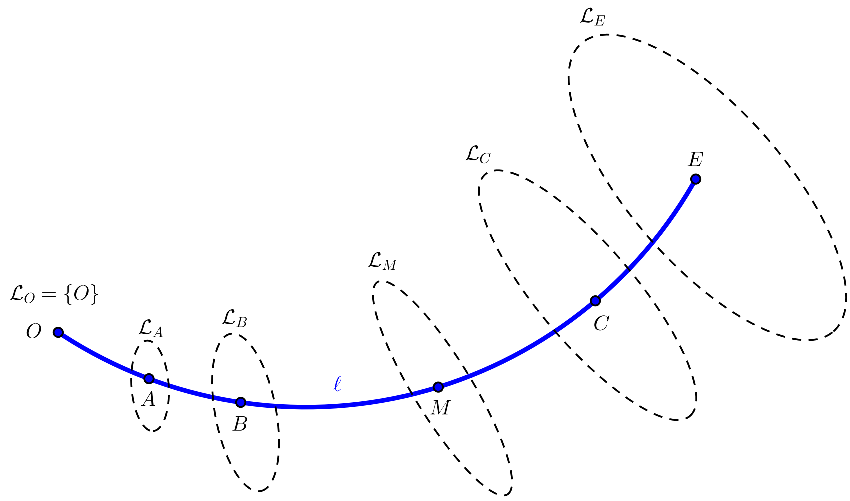
Une définition de la droite

1. Soit ℓ une ligne commençant au point O (comme *origine*) et se terminant au point E (comme *extrémité*) distinct de O. On suppose que cette ligne est une ficelle déformable mais *non élastique*. L'origine O est supposée fixe (immobile).

Soit M un point de ℓ. On tient la ficelle en M et on tire dessus en s'éloignant de O jusqu'à la limite permise (par la non élasticité de la ficelle) ; M va alors prendre place dans une partie de l'espace qu'on notera $\mathcal{L}_M$: elle est constituée de toutes les positions possibles de M obtenues par ce procédé.



Bien entendu quand $M = O$ la partie $\mathcal{L}_O$ est réduite au point O. D'autre part, si M et N sont deux points distincts de ℓ, les deux parties $\mathcal{L}_M$ et $\mathcal{L}_N$ sont disjointes. On note $\mathcal{L}$ la réunion de toutes les parties $\mathcal{L}_M$ pour M variant dans ℓ (*cf.* dessin ci-dessus).

On a une projection naturelle $\tau : \mathcal{L} \longrightarrow \ell$ définie comme suit. Si $m \in \mathcal{L}$, il existe une unique partie $\mathcal{L}_M$ qui le contient ; on pose alors $\tau(m) = M$. On dira :

- que la projection $\tau : \mathcal{L} \longrightarrow \ell$ est une *fibration*,
- que la ligne ℓ est la *base* de τ et que $\mathcal{L}$ est son *ensemble total*.

Pour tout $M \in \ell$, $\mathcal{L}_M = \tau^{-1}(M)$ est la *fibre* au-dessus de M.

2. Une *section* de la fibration τ est une application $\sigma : \ell \longrightarrow \mathcal{L}$ vérifiant $\tau(\sigma(M)) = M$ pour tout $M \in \ell$; ceci implique de façon évidente $\sigma(M) \in \mathcal{L}_M$.

Par l'*axiome du choix*, l'ensemble $\Sigma(\ell, \mathcal{L})$ des sections de τ n'est pas vide : *Dans chaque ensemble $\mathcal{L}_M$ (avec $M \in \ell$), on peut choisir un et un seul élément dans $\mathcal{L}_M$.*

Une section $\sigma \in \Sigma(\ell, \mathcal{L})$ permet de remonter la ligne ℓ en une partie de $\mathcal{L}$.

3. Définition. *On dira qu'une ligne ℓ commençant en O et se terminant en E est un* ***segment*** *$[OE]$ si tout point M de ℓ est aussi un élément de la fibre $\mathcal{L}_M$.*

Maintenant qu'on a la notion de segment que nous noterons simplement $[OE]$, on a celle de droite (OE) par le

Deuxième postulat d'Euclide. *Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.*