

Les éléments de base de la construction développée dans « Donc, d'après »

Source : « ... Donc, d'après... » de Philippe Colliard - Éditions Mathemagique.com
<https://www.donc-dapres.com>

Les quelques pages qui suivent ne sont pas, à proprement parler, un extrait du livre :
elles regroupent différentes définitions et affirmations essentielles à l'ensemble de sa construction.

Peut-être dois-je tout d'abord rappeler que si cette construction est - je l'espère - d'une grande rigueur, sa base axiomatique n'est pas « pure » : parce que je voulais que cette construction soit accessible à des collégiens, j'ai pris quelques libertés avec les axiomatiques d'Euclide ou de Hilbert.

En pratique, j'ai « inventé » des définitions et des axiomes « physiques »
(des axiomes qu'un lecteur a très joliment qualifiés d'« axiomes pédagogiques »)
qui m'ont permis, au prix de quelques redondances, d'expliciter des éléments
que les vraies axiomatiques manipulent mais ne définissent pas.

Parce que je n'ai pas voulu galvauder le mot « axiome »,
j'ai créé celui de « métaxiome » pour nommer les affirmations sur lesquelles repose ma construction.
Il s'agit toutefois majoritairement de vrais axiomes - parfois un peu dilués - empruntés à **David HILBERT**

Pourquoi « métaxiomes » ? Par analogie avec les instructions des métalangages informatiques, construites
à partir d'instructions de bas niveau... et qui deviennent à leur tour le bas niveau de ces métalangages.

Définitions logiques :

- D_{log}-1** **Affirmation** : toute phrase qui n'est ni une question, ni un ordre. Une affirmation peut être vraie ou fausse !
- D_{log}-2** **Prouver** ou **démontrer** : en partant d'une situation, enchaîner des certitudes bien choisies pour arriver à la conséquence que l'on voulait atteindre.
- D_{log}-3** **Axiome** : une affirmation dont personne ne peut démontrer ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse.
La notion d'axiome est quelque chose de fantastique : les axiomes sont à l'origine de tous les raisonnements.
- D_{log}-4** **Propriété** : une affirmation dont on a démontré qu'elle était vraie.
- D_{log}-5** **Théorème** : une propriété qui paraît suffisamment intéressante pour mériter ce nom.

Définitions physiques :

- D_{phy}-0** **Objet ponctuel** : objet imaginaire, « plus petit que petit » : un objet qui, à force d'être réduit, aurait implosé, serait rentré en lui-même. Aucun microscope ne peut l'agrandir.
Je l'imagine souvent lumineux : une sorte d'étoile très proche, que je peux diriger. (Aucun télescope ne peut non plus agrandir une étoile - à part notre Soleil : c'est parce que les étoiles, elles, sont « plus loin que loin ».)
- D_{phy}-1** **Point** : endroit que seul un objet ponctuel peut occuper exactement (sans en déborder).
- D_{phy}-2** **Ligne** : trajet d'un objet ponctuel (l'ensemble des points qu'il traverse en se déplaçant).
- D_{phy}-3** **Objet linéaire** : objet (imaginaire) qui occupe exactement une ligne.
Aucun microscope ne peut l'épaissir.
- D_{phy}-4** **« OLDI » (Objet Linéaire Droit Illimité)** : 2 points étant choisis, objet linéaire qui, de quelque façon qu'il traverse ces 2 points, occupe exactement le même endroit.
- D_{phy}-5** **Droite** : un endroit que seul un OLDI peut occuper exactement.
- D_{phy}-6** **Surface** : trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet n'est pas une ligne.
Surface dégénérée : le trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet est une ligne
(par exemple un objet-segment qui glisse le long de sa droite-support)
ou : le « trajet » d'un objet linéaire immobile !
- D_{phy}-7** **Plan** : 2 droites sécantes étant choisies, surface maximale engendrée par un OLDI qui se déplace en passant constamment par ces 2 droites, en 2 points (ou plus) distincts.
(Surface maximale : formée de tous les points pouvant être ainsi traversés par l'OLDI).
En chaque position, l'OLDI passe par un point - au moins - de chacune des 2 droites... Mais l'un de ces points peut être le point d'intersection des deux droites, l'OLDI occupant alors l'autre droite ☺ !

- D_{phy-8}** **Entre** : A, B et C étant 3 points, « B est entre A et C » signifie :
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C (ou de C à A), sans quitter la droite (AC), traverse B.
Si A, B et C sont trois points d'une ligne *l*, et si cette ligne *l* ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B est un point de la ligne *l*, entre A et C » signifie encore :
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C, sans quitter la ligne *l*, traverse B.
- D_{phy-9}** **Solide** : objet imaginaire, qui occuperait tous les points enfermés dans un espace limité par une surface « étanche ».
(Qui sépare tout l'espace géométrique en trois parties : l'espace extérieur - d'un côté de cette surface, la surface elle-même, l'espace intérieur - de l'autre côté de cette surface)
Ou : ensemble des points occupés par cet objet.
- D_{phy-10}** **Fil-unité** : objet linéaire souple qui, à sa création, occupe exactement le segment-unité.
(Mais tu peux ensuite le déplacer et comme il est souple, le modeler)
- D_{phy-11}** **Longueur d'une ligne, en unité s** : le nombre de fils-unité consécutifs du segment-unité *s* nécessaires pour occuper exactement cette ligne.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)
- D_{phy-12}** **Feuille-unité** : objet imaginaire souple qui, à sa création, occupe exactement le carré-unité.
(Mais tu peux ensuite le déplacer et comme il est souple, le modeler.)
- D_{phy-13}** **Aire d'une surface, en unité c** : le nombre de feuilles-unité du carré-unité *c* nécessaires pour occuper exactement cette surface.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)
- D_{phy-14}** **Bloc-unité** : matière imaginaire souple qui, à sa création, occupe exactement le cube-unité.
(Mais tu peux ensuite le déplacer et le modeler).
- D_{phy-15}** **Volume d'un solide, en unité k** : le nombre de blocs-unité du cube-unité *k* nécessaires pour occuper exactement ce solide.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)
- D_{phy-16}** **Feuille-angulaire-unité** : objet (imaginaire) qui occupe exactement les points communs à un angle-unité et à un disque du même plan que l'angle-unité, dont le centre est le sommet de cet angle, et dont tu as choisi le rayon.
(Tu peux déplacer cet objet.)
- D_{phy-17}** **Ecart angulaire d'un angle, en unité *α*** : le nombre de feuilles-angulaires-unité d'un angle-unité *α* ayant le même sommet que l'angle et nécessaires pour occuper exactement un secteur circulaire limité par cet angle.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)



Définitions mathématiques :

- D-1 Points alignés :** des points d'une même droite.
« Alignés » est un des faux amis les plus célèbres des mathématiques : sur une même ligne, d'accord... Mais pas n'importe laquelle !
- D-2 Du même côté :** sans précision supplémentaire, tu parles de points d'une même droite.
Dans ce cas, A, B et P étant trois points, « **P est du même côté de B que A** » signifie :
ou bien A est entre B et P, ou bien P est entre B et A.
- D-3 De part et d'autre :** tu parles habituellement de points d'une même droite.
A, B et P étant trois points, « **P et A sont de part et d'autre de B** » signifie alors :
B est entre P et A.
- D-4 Demi-droite :** A et B étant deux points, **la demi-droite [BA]** est l'ensemble des points de (AB) qui sont du même côté de B que A.
- D-5 Segment :** A et B étant deux points, **le segment [AB]** est l'ensemble des points de (AB) situés entre A et B.
- D-6 Figure :** tout ensemble composé de points. (Un point - ou plusieurs, une ligne – ou plusieurs, une surface...)
- D-7 Figures distinctes :** deux figures qui ne sont pas exactement composées des mêmes points.
(Il doit donc y avoir au moins un point qui est dans l'une des figures et pas dans l'autre... Ce qui permet de les *distinguer* ! En particulier, deux points distincts sont simplement deux points différents.)
- D-8 Droites sécantes :** deux droites qui ont exactement un point en commun.
On dit alors que les droites se coupent.
- D-9 Point d'intersection de deux droites sécantes :** le point commun à ces deux droites.
On dit alors que les droites se coupent « en ce point ».
- D-10 Figures coplanaires :** des figures d'un même plan.
- D-11 Plans sécants :** deux plans qui ont exactement une droite en commun.
On dit alors que les plans se coupent.
- D-12 Droite d'intersection de deux plans sécants :** la droite qui est commune à ces deux plans.
On dit alors que les deux plans se coupent selon cette droite.
- D-13 Plans parallèles :** soit deux fois le même plan, soit deux plans distincts qui n'ont pas de point commun.
Ou : deux plans qui ne sont pas sécants.
(Donc éventuellement deux fois le même plan !)
- D-14 Droites parallèles :** soit deux fois la même droite, soit deux droites **coplanaires** qui ne se coupent pas.
Ou : droites **coplanaires** qui ne sont pas sécantes. (Donc éventuellement deux fois la même droite !)

- D-15 Droite et plan sécants :** une droite et un plan qui ont exactement un point commun.
On dit alors que la droite et le plan se coupent en ce point.
- D-16 Droite et plan parallèles :** une droite et un plan qui ne sont pas sécants.
(Donc une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan !)
- D-17 Longueur :** mesure d'une ligne (comparaison de cette ligne à une ligne de référence).
- D-18 Unité de longueur :** un segment que tu as choisi comme segment-unité - ou n'importe lequel des autres segments-unité qui lui sont associés.
(Chacun d'entre eux peut servir de segment de référence.)
Ou : le nom qui a été donné à cet ensemble de segments, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.
(Le mètre, le pouce...)
- D-19 Distance (entre deux « éléments de base » : *points, droites et plans*) :** longueur de la plus courte des lignes qui les relient.
-
- D-42 Angle :** surface plane limitée par deux demi-droites de même origine.
N'oublie pas que ces deux demi-droites définissent deux angles (adjacents) !
- D-43 Côté d'un angle :** chacune des deux demi-droites qui le limitent.
- D-44 Sommet d'un angle :** l'origine commune à ses deux côtés.
- D-45 Angles adjacents :** deux angles coplanaires qui ont exactement un côté en commun.
(Donc le même sommet : ce sont des surfaces adjacentes particulières !)
- D-46 Ecart angulaire :** mesure d'un angle (comparaison de cet angle à un angle de référence).
- D-47 Unité d'écart angulaire :** un angle que tu as choisi comme angle-unité - ou n'importe lequel des autres angles-unité qui lui sont associés.
(Chacun d'entre eux peut servir d'angle de référence.)
Ou : le nom qui a été donné à cet ensemble d'angles, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.
(Le degré, le grade, le radian,...)
-
- D-103 Polygone élémentaire, ou simplement polygone, au collège :** polygone dont la frontière ne passe pas plusieurs fois par un même point.
-
- D-155 π (Pi) :** le rapport du périmètre d'un disque au diamètre de ce disque (quel que soit le disque).

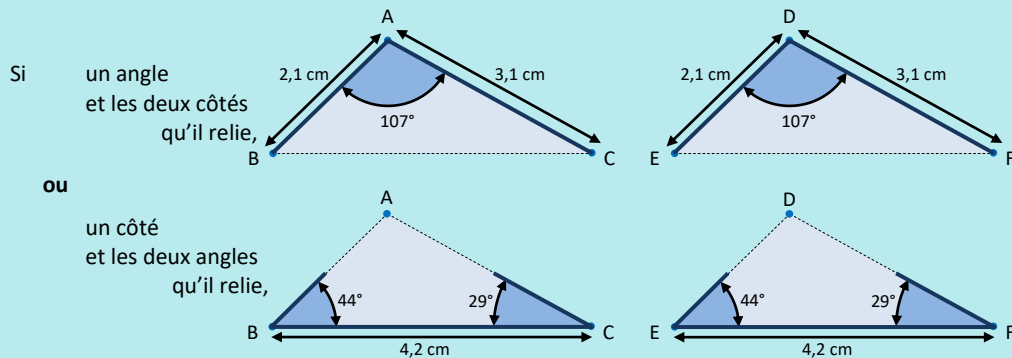
Métaxiomes physiques :

- M_{phy-0}** Un objet ponctuel qui se déplace occupe constamment un point.
- M_{phy-1}** Un fil-unité déplacé ou modelé reste un fil-unité.
- M_{phy-2}** A et B étant deux points d'une ligne et un segment-unité étant choisi, il est toujours possible, en occupant la ligne depuis A par des fils-unité consécutifs, de dépasser B.
- M_{phy-3}** Une unité de longueur et un nombre entier n, supérieur à 1, étant choisis, il existe toujours une autre unité de longueur, et une seule, dont n fils-unité consécutifs occupent exactement un segment-unité de l'unité de longueur initiale.
- Traduction libre : à partir d'une unité de longueur, tu peux toujours créer une nouvelle unité, n fois plus petite que la première.
- M_{phy-4}** Une feuille-unité déplacée ou modelée reste une feuille-unité.
- M_{phy-5}** Un bloc-unité déplacé ou modelé reste un bloc-unité.
- M_{phy-6}** Quelle que soit sa position, une feuille-angulaire-unité reste une feuille-angulaire-unité.
- M_{phy-7}** Une unité d'écart angulaire et un nombre entier n, supérieur à 1, étant choisis, il existe toujours une autre unité d'écart angulaire, et une seule, dont n feuilles-angulaires-unité occupent exactement un angle-unité de l'unité initiale.
- Traduction libre : à partir d'une unité d'écart angulaire, tu peux toujours créer une nouvelle unité, n fois plus petite que la première.

Métaxiomes mathématiques :

- M-1** Il passe exactement une droite par deux points distincts.
- M-2** Si deux points d'une droite sont dans un plan, alors toute la droite est contenue dans le plan.
(Tu diras alors qu'il s'agit d'une droite « du plan »)
- M-3** Il passe exactement un plan par trois points non-alignés.
- Ou :** il passe exactement un plan par une droite et un point extérieur à cette droite.
- Ou encore :** il passe exactement un plan par deux droites sécantes.
- M-4** Il existe au moins un point extérieur à un plan.
- M-5** Lorsque deux plans sont distincts, soit ils ont exactement une droite en commun, soit ils n'ont aucun point commun.

- M-6** Par un point, il passe exactement un plan parallèle à un plan donné.
- M-7** Deux plans qui sont parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.
- M-8** Par un point, il passe exactement une droite parallèle à une droite donnée.
- M-9** Deux droites qui sont parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.
- M-10** Soient l_1 et l_2 deux lignes limitées ayant une extrémité en commun, et n'ayant aucun autre point commun que cette extrémité ; soit l la ligne formée de l'ensemble des points de l_1 et l_2 . Alors, pour toute unité de longueur : la longueur de l est la somme des longueurs de l_1 et de l_2 .
- M-11** Une unité de longueur étant choisie, soient A et B deux points et soit AB la longueur du segment qui les relie : la longueur de toute autre ligne reliant A et B est supérieure à AB.
Autrement dit, la plus courte des lignes qui relient deux points est le segment : la distance entre deux points est donc la longueur du segment qui les relie.
Dans ce cas particulier, « longueur du segment » et « distance entre ses extrémités » ont la même signification - et c'est vraisemblablement de là que vient la confusion habituelle entre longueur et distance. Mais ce n'est vraiment qu'un cas particulier !
- M-12** Soit un plan P et un point A de l'espace : il existe un point de P, plus proche de A que tout autre point de P.
- M-13** Soient A_1 et A_2 deux angles adjacents ; soit A l'angle formé de l'ensemble des points de A_1 et A_2 . Alors, pour toute unité d'écart angulaire : l'écart angulaire de A est la somme des écarts angulaires de A_1 et de A_2 .
- M-14** Si deux triangles ABC et DEF sont tels que $AB = DE$, $AC = DF$ et $BC = EF$, alors $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.
(Les écarts angulaires, pas des angles !!!)
- M-15** Deux triangles étant donnés,



ont les mêmes mesures dans les deux triangles, alors ces deux triangles sont isométriques.

« Relier » n'est pas vraiment un mot mathématique, mais je l'utilise quand même parce qu'il me paraît clair : un angle relie deux côtés lorsque ces deux côtés ont comme extrémité le sommet de l'angle, et un côté relie deux angles lorsque ces deux angles ont comme sommets les extrémités de ce côté. ☺

- M-16** Si une droite située dans le plan d'un triangle coupe l'un des côtés de ce triangle, elle en coupe également un 2^{ème} côté.