

Les axiomes d'Euclide



Exposer l'axiomatique d'Euclide n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire.

En effet, il existe plusieurs versions de cette axiomatique, dont la forme, en 2300 ans, a quelque peu évolué.

*Permettez-moi de vous renvoyer au corpus du laboratoire **SPHERE**, publié sous la responsabilité d' **Odile Kouteynikoff (SPHERE)**, **François Loget (CESR)** et **Marc Moyon (FRED, Centre A. Koyré)**, et que vous trouverez ici :*

<http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article1052> .

Je vous propose toutefois ici **trois versions historiques** partielles du premier livre des « éléments », incluant non seulement les axiomes d'Euclide, mais également les définitions fondamentales et les postulats - la distinction entre axiome et postulat étant parfois très... philosophique :

les postulats étaient en quelque sorte ce que nous imposions (demandions) à la géométrie de nous apporter, et les axiomes ce qu'elle nous imposait d'accepter pour pouvoir nous l'apporter (fonctionner comme nous le voulions). De fait, l'un et l'autre étaient des affirmations indépendantes et non démontrables - des axiomes, au sens actuel du terme.

La première version, qui en est également la première version imprimée, date de 1482.

Elle a été rédigée par **Erhard Ratdolt** à partir du texte de **Johannes Campanus** (rédigé vers 1260), et publiée à Venise.

La seconde date de 1632 : il s'agit de la traduction des « éléments » en français, par **Didier Henrion**, publiée à Paris, par sa veuve.

La troisième, enfin, rédigée et publiée en 1804, est de **François Peyrard**, bibliothécaire de l'Ecole Polytechnique.

Pour le plaisir d'en conserver l'atmosphère, je n'ai que très marginalement retouché la version de **Didier Henrion**, qui me paraît globalement compréhensible, telle qu'elle est.

La version de **Erhard Ratdolt** étant en latin, il m'a bien fallu la franciser :

pour les mêmes raisons d'atmosphère, je me suis appuyé, là encore, sur des expressions de **Didier Henrion**.

La version de **François Peyrard** est, elle, dans un français moderne.

Vous remarquerez évidemment de nombreuses différences entre ces trois versions. Tout particulièrement, l'un des axiomes les plus célèbres de l'axiomatique euclidienne, l'axiome « des parallèles » est au départ la pétition (le postulat) numéro quatre, pour devenir l'axiome numéro 11... ou son cinquième postulat, où son cinquième axiome (et, habituellement sous une forme bien différente de ce qui en était l'énoncé primitif !).

En axiomatique contemporaine, il est maintenant « l'axiome d'Euclide » mais ne voulant fâcher personne, je ne m'étendrai pas sur les interprétations modernes de cette axiomatique - d'autant plus, évidemment, que celle qui lui a succédé (l'axiomatique de Hilbert) avait de bonnes raisons de le faire !

Prenez, si vous le pouvez, le temps de cliquer sur les sources - ne serait-ce que pour avoir le plaisir (l'émotion ?) de voir apparaître des pages composées il y a bien longtemps.

Enfin, après ces trois versions quelque peu académiques, vous trouverez la version atypique (et artistique) composée en 1847 par **Oliver Byrne** : il est, à ma connaissance, le seul mathématicien à avoir tenté une approche graphique des démonstrations des « éléments » !

L'ouvrage est en anglais... Mais les graphismes en sont universels :)

(Les éditions Taschen en ont composé en 2010 un superbe coffret - qui a concouru pour le prix Tangente)

Les définitions, postulats et axiomes du premier livre des « éléments »

A) D'après Erhard Ratdolt - 1482

Source : <https://opacplus.bsb-muenchen.de/metaopac/search?View=default&oclcno=645650435>

ou, plus directement : <https://www.wdl.org/en/item/18198/view/1/7/> (Images 7 et 8)

Définitions

- 1 le point, est ce qui n'a aucune partie
- 2 La ligne, est une longueur sans largeur dont les extrémités de la ligne, sont des points
- 3 La ligne droite, est celle qui est également comprise et étendue entre ses points
- 4 Superficie, est ce qui a longueur et largeur uniquement dont les extrémités de la superficie, sont lignes
- 5 Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes
- 6 Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en un plan non directement
- 7 Que si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera appelé rectiligne
- 8 Quand une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, fait les angles de part et d'autre égaux entre eux, les angles sont droits ;
- 9 et la ligne tombante est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe
- 10 Angle obtus, est celui qui est le plus grand qu'un droit
- 11 Mais l'aigu, est celui qui est plus petit qu'un droit
- 12 Terme, est l'extrémité de quelque chose
- 13 Figure, est ce qui est compris et environné d'un, ou de plusieurs termes
- 14 Cercle, est une figure plane, contenue par une seule ligne qu'on appelle circonférence vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entre elles; Et ce point-là, est appelé centre du cercle
- 15 Diamètre du cercle, est une ligne droite menée par le centre du cercle, et finissant de part et d'autre à la circonférence d'iceluy cercle, le divise en deux également
- 16 Demi-cercle, est une figure comprise du diamètre, et de moitié de la circonférence
- 17 Portion ou segment de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, et de partie de la circonférence
- 18 Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droites
Figure de trois côtés, est celle qui est comprise de trois lignes droites
Figure de quatre côtés, est celle qui est comprise de quatre lignes droites
Figures multilatères, ou de plusieurs côtés, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droites

- 19 Or des figures de trois côtés, celle se nomme Triangle équilatéral, qui a les trois côtés égaux
Triangle isocèle, qui a deux côtés égaux seulement
Scalène, qui a les trois côtés inégaux
Encore des figures de trois côtés, celle se nomme triangle rectangle qui a un angle droit
Ambligone, qui a un angle obtus
Oxigone, qui a les trois angles aigus
- 20 Mais des figures de quatre côtés ; celle qui a les quatre côtés égaux, et les quatre angles droits s'appelle carré ;
Carré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les côtés égaux ;
Rhombe, qui a les quatre côtés égaux, mais non pas les quatre angles droits
- 21 Rhomboïde, qui a les angles opposés et les côtés opposés aussi égaux entre eux, sans être équilatéral, ni rectangle.
Toute autre figure de quatre côtés, est appelée trapèze
- 22 Lignes droites parallèles, sont celles qui étant sur un même plan, et prolongées infiniment de part et d'autre ne se rencontrent jamais

Pétitions ou demandes (Postulats)

- 1 d'un point donné à un autre point mener une ligne droite continuer infiniment une ligne droite donnée et terminée
- 2 décrire un cercle de quelque centres et intervalle que ce soit
- 3 tous les angles droits sont égaux entre eux
- 4 si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites, fait les angles intérieurs d'un même côté plus petit que deux droits, icelles deux lignes étant continuées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits
- 5 deux lignes droites n'enferment pas un espace

Axiomes ou communes sentences

- 1 les choses égales à une même, sont égales entre elles
- 2 si à choses égales, on ajoute choses égales, les tous sont égaux
- 3 si de choses égales, on ôte choses égales, les restes sont égaux
- 4 si de choses inégales, on ôte choses égales, les restes sont inégaux
- 5 si à choses inégales, on ajoute choses égales, les tous sont inégaux
- 6 les choses doubles d'une autre sont égales entre elles
- 7 les choses qui sont moitié d'une même, sont égales entre elles
- 8 les choses qui conviennent entre elles, sont égales entre elles
- 9 le tout est plus grand que la partie

B) D'après **Didier Henrion - 1632**

Source : les 15 livres des éléments géométriques d'Euclide).

BNF <http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-68013&I=1&M=imageseule>
avancer page à page jusqu'à la page 6

Définitions

- 1 le point, est ce qui n'a aucune partie
- 2 La ligne, et une longueur sans largeur
- 3 Les extrémités de la ligne, sont des points
- 4 La ligne droite, est celle qui est également comprise et étendue entre ses points
- 5 Superficie, est ce qui a longueur et largeur tant seulement
- 6 Les extrémités de la superficie, sont lignes
- 7 Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes
- 8 Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en un plan non directement
- 9 Que si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera appelé rectiligne
- 10 Quand une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, fait les angles de part et d'autre égaux entre eux, les angles sont droits ; et la ligne tombante est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe
- 11 Angle obtus, est celui qui est le plus grand qu'un droit
- 12 Mais l'aigu, est celui qui est plus petit qu'un droit
- 13 Terme, est l'extrémité de quelque chose
- 14 Figure, est ce qui est compris et environné d'un, ou de plusieurs termes
- 15 Cercle, est une figure plane, contenue par une seule ligne qu'on appelle circonférence vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entre elles
- 16 et ce point-là, est appelé centre du cercle
- 17 Diamètre du cercle, est une ligne droite menée par le centre du cercle, et finissant de part et d'autre à la circonférence d'iceluy cercle, le divise en deux également
- 18 Demi-cercle, est une figure comprise du diamètre, et de moitié de la circonférence
- 19 Portion ou segment de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, et de partie de la circonférence
- 20 Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droites
- 21 Figure de trois côtés, est celle qui est comprise de trois lignes droites
- 22 Figure de quatre côtés, est celle qui est comprise de quatre lignes droites

- 23 Figures multilatères, ou de plusieurs côtés, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droites
- 24 Or des figures de trois côtés, celle se nomme Triangle équilatéral, qui a les trois côtés égaux
- 25 Triangle isocèle, qui a deux côtés égaux seulement
- 26 Scalène, qui a les trois côtés inégaux
- 27 Encore des figures de trois côtés, celle se nomme triangle rectangle qui a un angle droit
- 28 Ambligone, qui a un angle obtus
- 29 Oxigone, qui a les trois angles aigus
- 30 Mais des figures de quatre côtés ; celle qui a les quatre côtés égaux, et les quatre angles droits s'appelle carrés
- 31 Carré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les côtés égaux
- 32 Rhombe, qui a les quatre côtés égaux, mais non pas les quatre angles droits
- 33 Rhomboïde, qui a les angles opposés et les côtés opposés aussi égaux entre eux, sans être équilatéral, ni rectangle
- 34 Toute autre figure de quatre côtés, est appelée trapèze
- 35 Lignes droites parallèles, sont celles qui étant sur un même plan, et prolongées infiniment de part et d'autre ne se rencontrent jamais
- 36 Parallélogramme, est une figure quadrilatère qui a les côtés opposés parallèles, ou équidistants
- 37 Mais quand en un parallélogramme on mène un diamètre, et deux lignes droites parallèles aux côtés lesquelles coupent iceluy diamètre à un même point, divisent le parallélogramme en quatre autres parallélogrammes ; ces deux-là par lesquelles le diamètre ne passe point sont appelés compléments ; mais les deux autres par lesquelles le diamètre passe, sont dits être à l'entour du diamètre

Pétitions ou demandes (Postulats)

- 1 d'un point donné à un autre point mener une ligne droite
- 2 continuer infiniment une ligne droite donnée et terminée
- 3 décrire un cercle de quelque centres et intervalle que ce soit
- 4 étant donné quelconque grandeur, on en peut prendre une autre plus grande, ou moindre

Axiomes ou communes sentences

- 1 les choses égales à une même, sont égales entre elles
- 2 si à choses égales, on ajoute choses égales, les tous sont égaux
- 3 si de choses égales, on ôte choses égales, les restes sont égaux

- 4 si à choses inégales, on ajoute choses égales, les tous sont inégaux
- 5 si de choses inégales, on ôte choses égales, les restes sont inégaux
- 6 les choses doubles d'une autre sont égales entre elles
- 7 les choses qui sont moitié d'une même, sont égales entre elles
- 8 les choses qui conviennent entre elles, sont égales entre elles
- 9 le tout est plus grand que la partie
- 10 tous les angles droits sont égaux entre eux
- 11 si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites, fait les angles intérieurs d'un même côté plus petit que deux droits, icelles deux lignes étant continuées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits
- 12 deux lignes droites n'enferment pas un espace
- 13 deux lignes droites se rencontrant indirectement non pas un même et comme un segment
- 14 deux lignes droites se rencontrant à un point indirectement, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entrecouperont nécessairement en icelui point
- 15 si à choses égales on ajoute choses inégales, l'excès des toutes sera le même que l'excès des ajoutées
- 16 si à choses inégales on ajoute choses égales, l'excès des toutes sera le même que l'excès de celles qui étaient au commencement
- 17 si de choses égales on retranche choses inégales, l'excès des restantes sera le même que l'excès des retranchées
- 18 si de choses inégales on ôte choses égales, l'excès des restantes sera le même que l'excès des toutes
- 19 le tout est égal à toutes les parties prises ensemble
- 20 si un tout est double d'un tout, et le retranché du retranché, le reste sera aussi double du reste

C) D'après **François Peyrard - 1805**

Source : **Oeuvre numérisée par Marc Szwajcer**

Cliquer ici : http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/geometrie1.htm#_ftnref3

Et pour conclure en couleur : l'ouvrage de Oliver Byrne - 1847

il est numérisé ici :

<http://publicdomainreview.org/collections/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid-1847/>