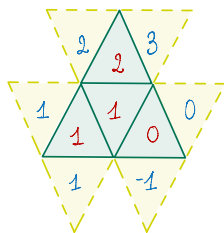


Carnet de route du Séminaire de la Détente Mathématique

Notes prises par Léo Dont

pour l'exposé du

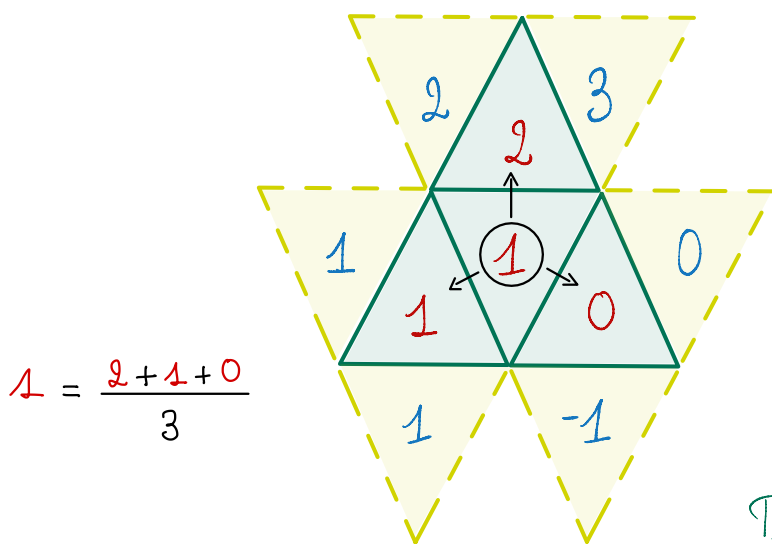
4 novembre 2020 par Olivier Druet



Triangles Magiques
de Dirichlet



Un triangle magique de Dirichlet est un triangle d'une certaine taille avec des nombres intérieurs et des nombres extérieurs. Ce triangle est dit magique si tous les nombres intérieurs sont la moyenne de leurs voisins.



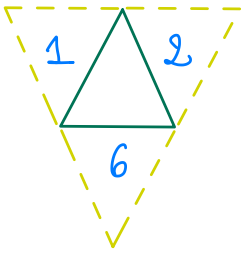
triangle de
taille 2

Triangle magique
de Dirichlet de taille 2

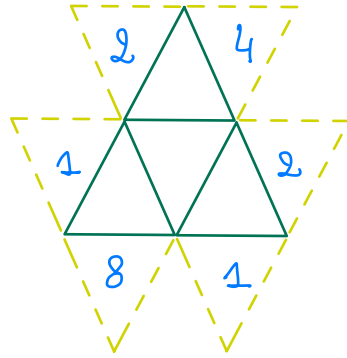
jouons alors à un jeu !

Règles du jeu Étant donné un triangle dont on connaît les valeurs extérieures, essayons de remplir les triangles intérieurs pour obtenir un triangle magique de Dirichlet.

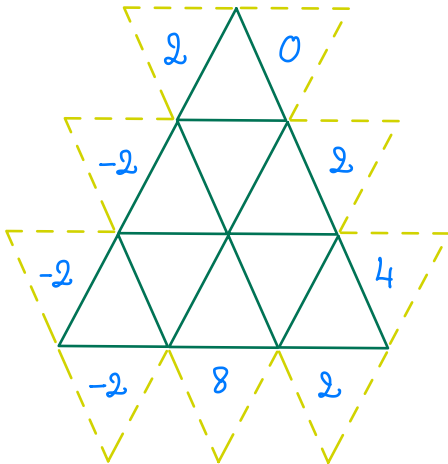
On commence par ...



... un très facile ...

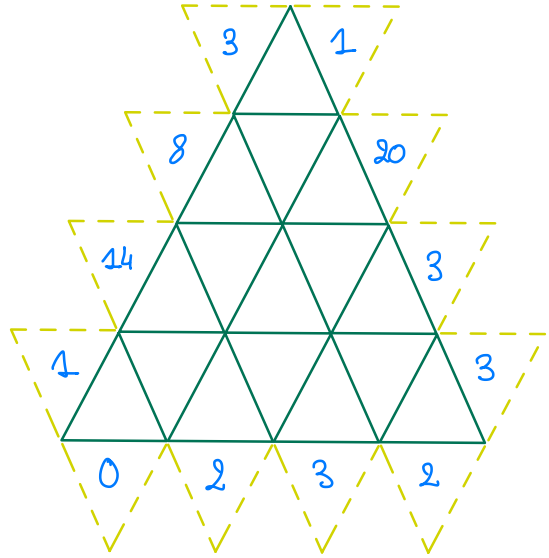


... puis un pas trop difficile ...



... un difficile ...

... et enfin : le défi !



Réponses : et la fin !

Alors comment faire ? Quelles sont les propriétés des triangles magiques de Dirichlet ?

Dans la suite, on considèrera des exemples de triangles magiques de taille 2, mais les raisonnements qui suivent sont valables pour des triangles de taille quelconque.

I. Valeurs maximales & minimales possibles pour un triangle magique de Dirichlet : Principes du maximum & du minimum.

À votre avis, où se trouve la valeur maximale dans un triangle magique de Dirichlet, au bord ou au centre ?

Supposons que la valeur maximale n'est pas atteinte sur un triangle au bord ∇ . Elle est donc atteinte à l'intérieur, disons dans le triangle $\blacktriangle$.

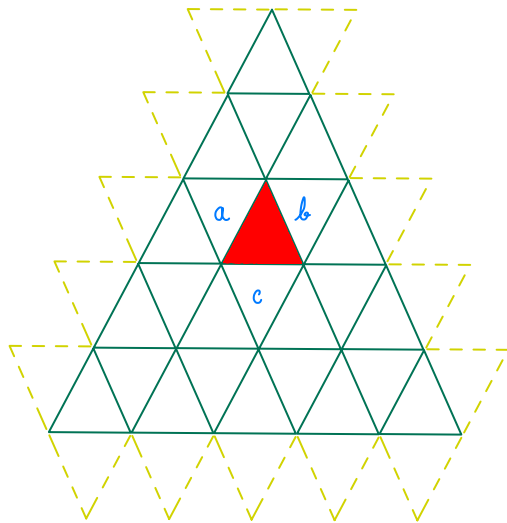
Alors $\blacktriangle$ est la moyenne de ses voisins :

$$\blacktriangle = \frac{\triangle a + \triangle b + \triangle c}{3}$$

Mais

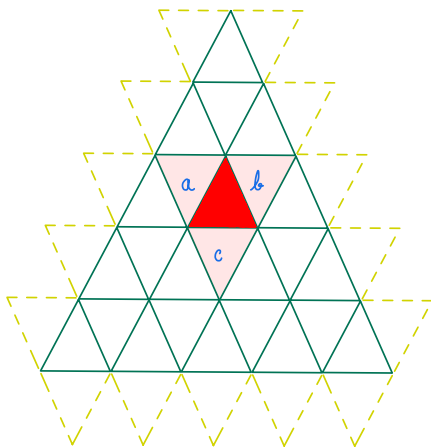
$$\begin{array}{l} \blacktriangle \geq \triangle a \\ \blacktriangle \geq \triangle b \\ \blacktriangle \geq \triangle c \end{array} \quad \text{car } \blacktriangle$$

est la valeur maximale du triangle

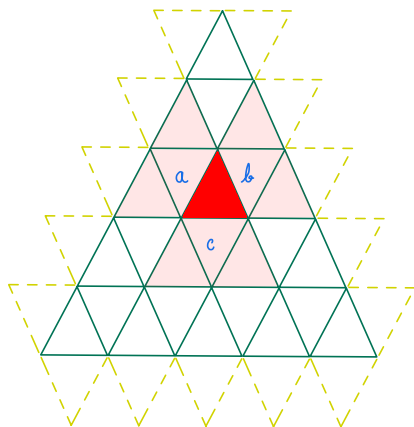


magique de Dirichlet. Ainsi on a nécessairement

$$\triangle = \nabla_a = \nabla_b = \nabla_c .$$



Puis on recommence avec les triangles voisins de ∇_a , ∇_b et ∇_c ;

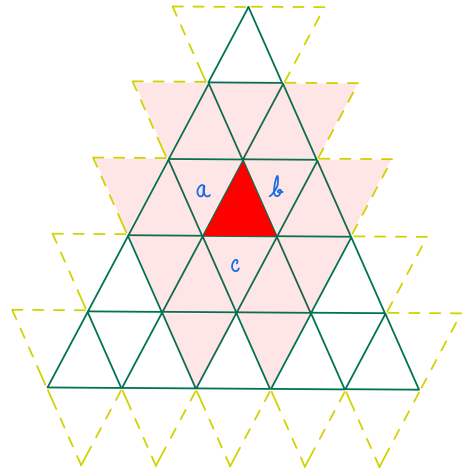


puis les voisins de leurs voisins ; et ainsi de suite ...

jusqu'à atteindre le bord ⚡

ce qui est une contradiction avec notre hypothèse de départ.

La réponse est donc au bord !



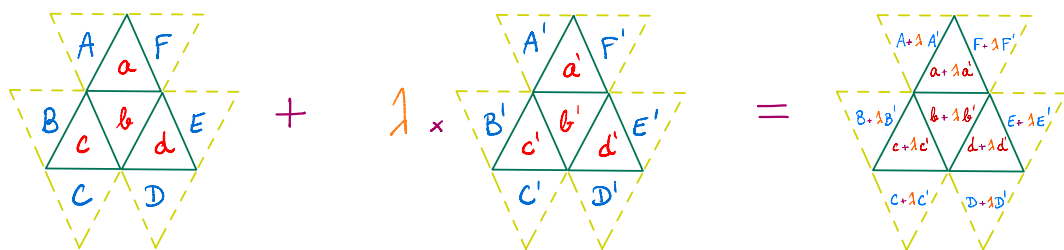
la démo est  finie ↗

On appelle cette propriété : principe du maximum. De même, la valeur minimale est atteinte sur le bord : c'est le principe du minimum.

II. Unicité des triangles magiques de Dirichlet

On va maintenant voir qu'étant donné les valeurs extérieures connues, si un triangle de Dirichlet est magique (pour ces valeurs aux bords), alors il est unique.

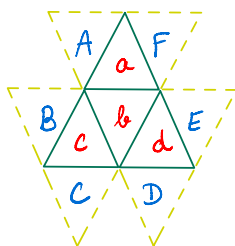
On remarque qu'on peut additionner, soustraire deux triangles magiques de Dirichlet : le résultat est encore un triangle magique de Dirichlet. De même, on peut aussi multiplier un triangle magique de Dirichlet par un nombre réel.



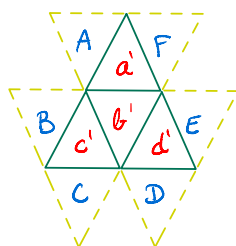
magique + 1 × magique = magique

On dit que les triangles magiques de Dirichlet ^{de mêmes tailles} forment un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

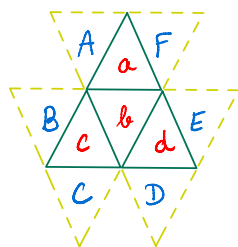
Revenons à l'unicité. Supposons qu'il existe deux triangles magiques de Dirichlet pour des valeurs aux bords A, B, C, D, E et F données :



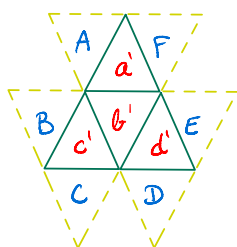
et



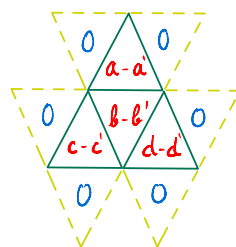
On peut les soustraire :



—



=

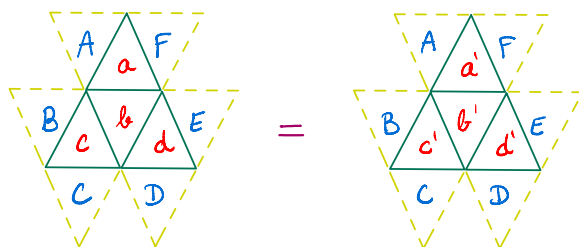


magique

On a vu que les valeurs minimales et maximales d'un triangle magique sont atteintes sur le bord, c'est-à-dire 0 dans notre cas. Donc toutes les valeurs au centre sont égales à 0 :

$$a - a' = b - b' = c - c' = 0 \quad \text{ou encore} \quad \begin{matrix} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{matrix} .$$

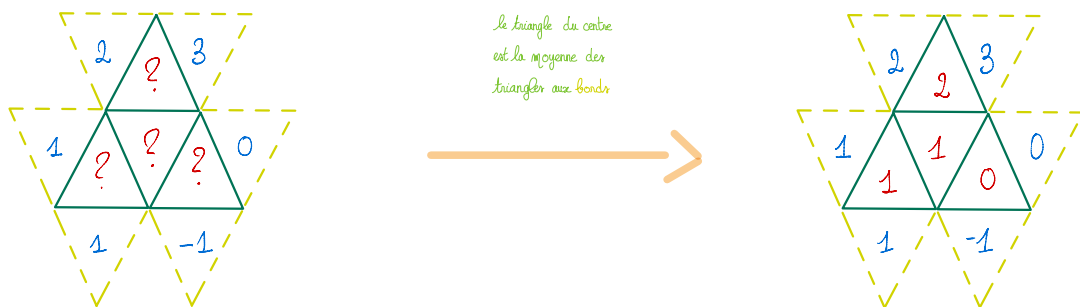
Donc on a bien montré l'unicité :



Et de 2! 

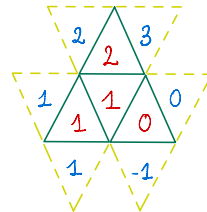
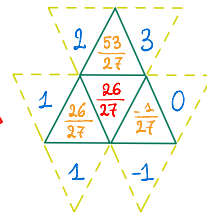
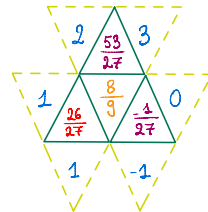
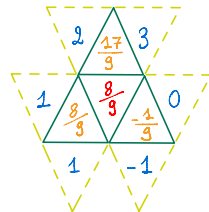
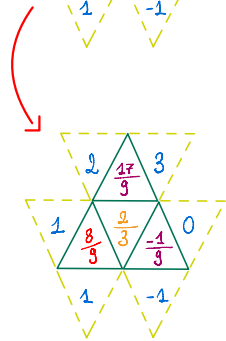
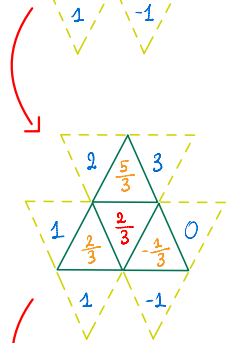
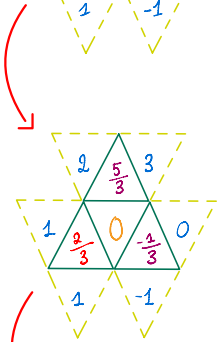
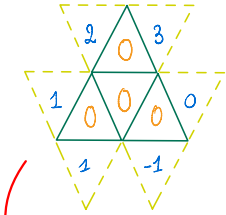
III. Comment remplir ?

1° - Au feeling : sur des petits triangles ça peut marcher



mais pour de grands triangles ça peut devenir compliqué...

2° - Par approximations successives : on remplit les triangles intérieurs par une même valeur, par exemple 0 ou la moyenne des valeurs aux bords.



La valeur du triangle dans le coin gauche n'étant pas la moyenne de ses voisins, on la corrige.

Mais maintenant, c'est le triangle au centre qui est incorrect. Il faut donc le corriger à son tour. Puisque on a changé le triangle au centre, il faut re-corriger le triangle du coin gauche.

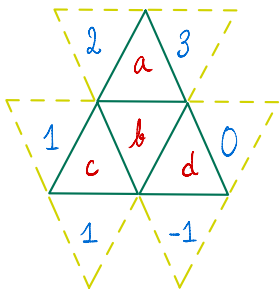
Et ainsi de suite si ce n'est pas fini...

en prenant la limite après beaucoup beaucoup d'étapes

On peut noter qu'en remplissant les triangles par la valeur minimale au bord, pour chaque triangle, la suite des nombres obtenus après chaque itération est croissante. Elle est de plus majorée par le principe du maximum. Par conséquent (théorème de licence 1) la suite converge, et de plus on peut vérifier que le "triangle limite" est un triangle magique de Dirichlet. En particulier, cette méthode itérative montre l'existence d'un triangle magique de Dirichlet quelques soient les valeurs aux bords.

3° En résolvant des équations : on écrit un système d'équations

qu'on va ensuite résoudre avec des ordis et des algorithmes.



Les nombres a, b, c et d satisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} a = \frac{2+3+b}{3} \\ b = \frac{a+c+d}{3} \\ c = \frac{1+1+b}{3} \\ d = \frac{-1+0+b}{3} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 3a = 5 + b \\ 3b = a + b + d \\ 3c = 2 + b \\ 3d = b - 1 \end{cases}$$

On écrit ce système sous forme matricielle :



astuce du mathématicien pour résoudre les systèmes d'équations



un tableau de nombres

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'*inverser* cette *matrice* pour trouver les nombres *a, b, c* et *d*.

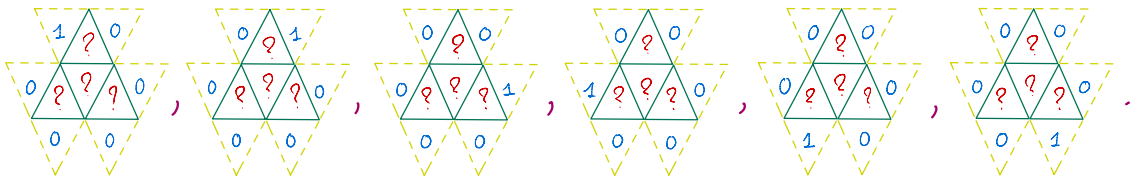
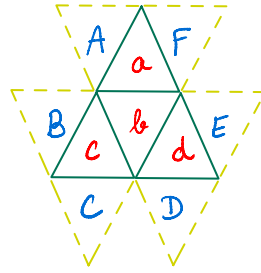
Ici la *matrice* à inverser a 16 éléments, ça peut prendre du temps même pour un ordinateur... Heureusement, on peut gagner du temps dans les calculs !

Cette méthode repose sur les *propriétés de linéarité* et d'*unicité* des triangles magiques de Dirichlet :

The diagram illustrates the decomposition of a Dirichlet magic triangle into a sum of scaled versions of four base triangles. The base triangle on the left has vertices labeled 2 (top), 1 (bottom-left), and 3 (bottom-right), and internal nodes labeled 2 (top-center), 1 (middle-left), 1 (middle-right), 0 (bottom-center), 1 (bottom-left-outer), and -1 (bottom-right-outer). This triangle is equal to the sum of four scaled triangles:

- $2 \times$ (Triangle with top node 1, bottom-left 0, bottom-right 0, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- $+ 1 \times$ (Triangle with top node 0, bottom-left 1, bottom-right 0, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- $+ 1 \times$ (Triangle with top node 0, bottom-left 0, bottom-right 1, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- $+ 3 \times$ (Triangle with top node 0, bottom-left 0, bottom-right 1, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- $+ 0 \times$ (Triangle with top node 0, bottom-left 0, bottom-right 1, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- $+ (-1) \times$ (Triangle with top node 0, bottom-left 0, bottom-right 1, and internal nodes 0, 0, 0, 0, 0, 0)

On se rend alors compte que tout
triangle magique de Dirichlet
s'écrit comme une combinaison linéaire
des 6 triangles magiques de Dirichlet
suivants :

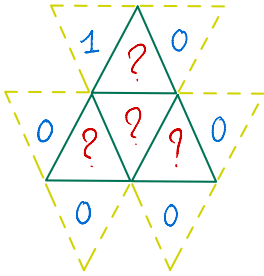


On dit que cette famille forme une **base** de l'espace vectoriel des triangles magiques de Dirichlet de taille 2.
En particulier il est de dimension 6.

Question pour vous : Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des triangles magiques de Dirichlet de taille n ,
et pouvez-vous donner une base ?

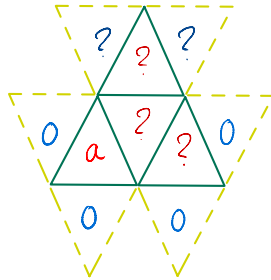
Il suffit donc de déterminer les nombres à l'intérieur des 6 triangles
magiques précédents pour trouver n'importe quel triangle magique de Dirichlet

de taille 2.



Traitons le cas du premier des 6 triangles.

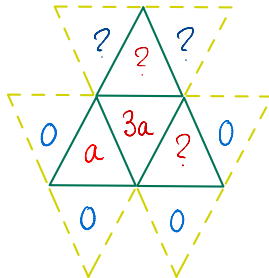
Partons de la configuration suivante :



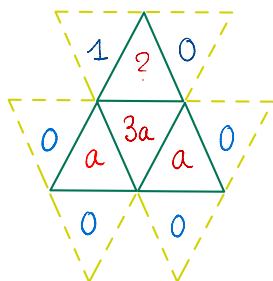
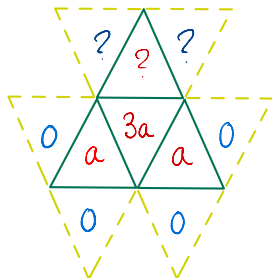
on place un a en bas à gauche qui est notre inconnue.

on se donne un peu de latitude sur les deux triangles en haut.

alors on peut écrire :



Puis on a :



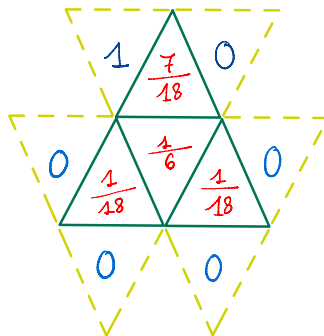
Et alors, si on pose 1 dans le triangle en haut à gauche, et 0 en haut à droite, alors on obtient :

$$? = \frac{1 + 3a}{3}$$

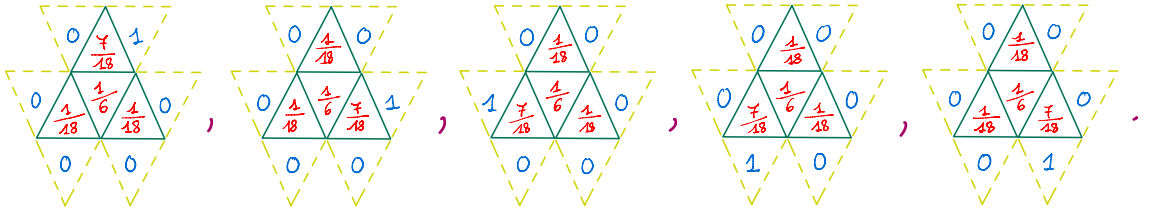
$$\text{et } 3a = \frac{? + 2a}{3}$$

On en déduit alors $a = \frac{1}{18}$,

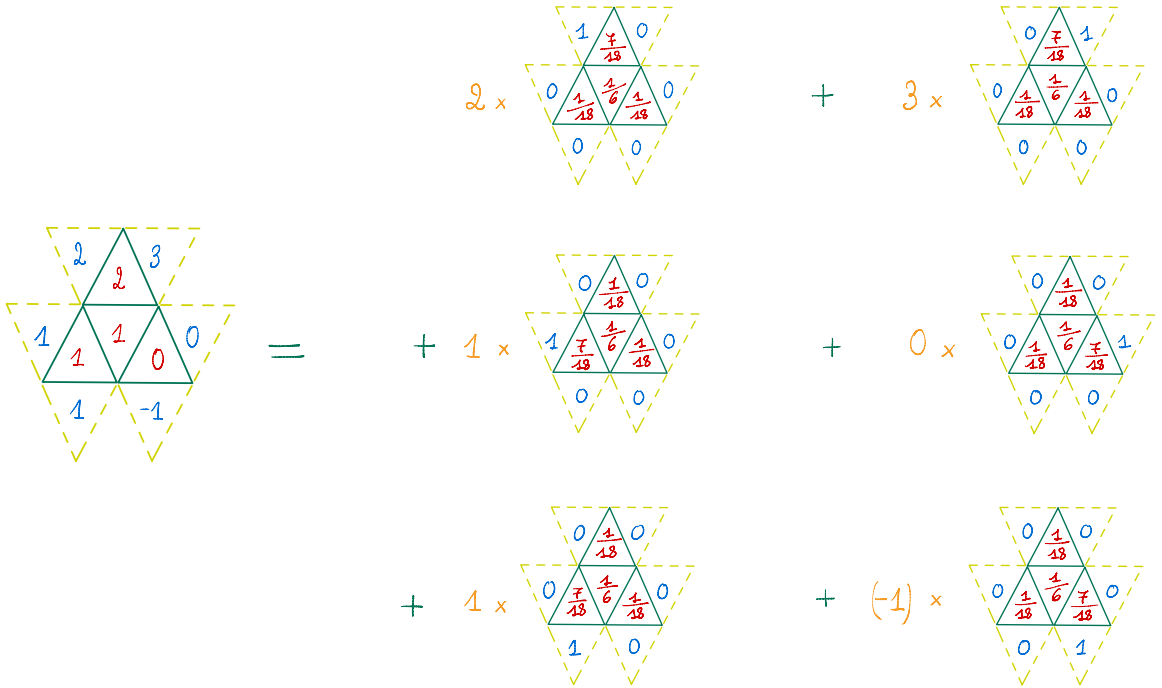
et ainsi on obtient :



De la même manière, on trouve

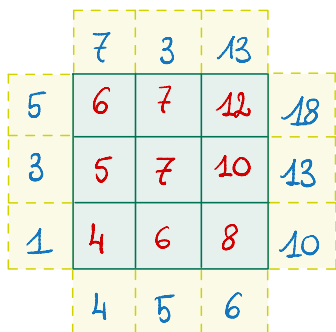


Et on vérifie alors que :

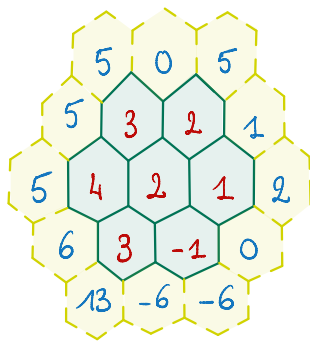


Remarquons que les raisonnements précédents ne sont pas spécifiques aux triangles ! On peut refaire exactement pareil avec

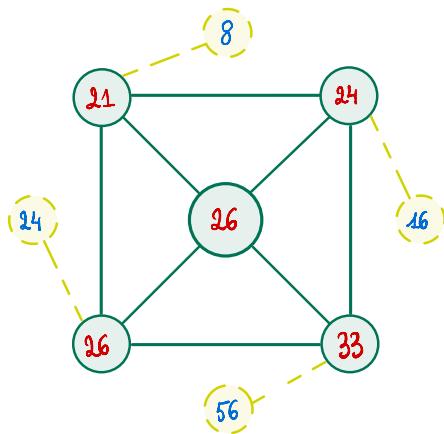
des carrés,



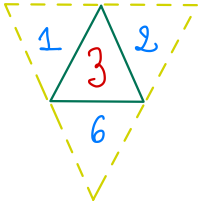
des hexagones,



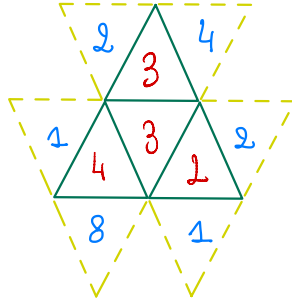
ou
(presque) n'importe quel graphe !



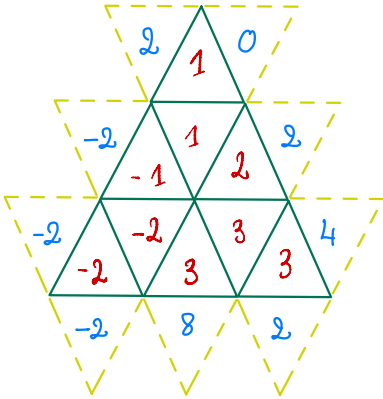
Maintenant vous pouvez terminer le jeu du début !



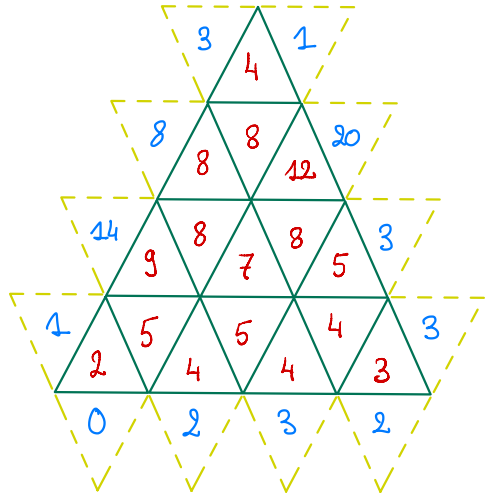
le très facile



le pas trop difficile



le difficile



le défi

Et voilà !