Mesdames, Messieurs,

Sauf *faille de raisonnement difficile à déceler*, j'ai l'honneur de prétendre avoir résolu, *ou presque*, la conjecture de Syracuse par la méthode inverse et une approche matricielle. L'approche matricielle, qui se veut globale, pourrait nous dispenser de nous noyer dans des calculs inextricables tels que ceux qui sont proposés çà et là ainsi que des considérations d'altitude maximale et de temps de vol, considérations qui ont montré leurs limites face à la boîte de Pandore d'où ont toujours surgi de nouveaux cas calculatoires à résoudre sitôt en résolu un. Les considérations de Théorie des Nombres en tant que telle n'ont pas non plus mené bien loin.
L'ensemble de tous les antécédents de 1 devrait se confondre avec celui des entiers positifs qui lui sont supérieurs.

Première partie

Rappel:
Tout nombre s_n d'une suite de Syracuse, admet, s'il est impair, un suivant tel que $s_{n+1} = \dfrac{3 \cdot s_n + 1}{2}$ et s'il est pair un suivant $s_{n+1} = \dfrac{1 \cdot s_n + 0}{2}$. En tout cas il s'agit d'un suivant unique. Donc si l'on veut faire un suite de Syracuse en partant d'un nombre quelconque la voie est toute tracée et la suite obtenue est unique.

Par contre choisissons un nombre quelconque à partir duquel essayer de construire une suite de Syracuse à rebours cette fois: Selon le cas ce nombre admettra comme précédent soit son double (En tout état de cause) soit son double et $s_{n-1} = \dfrac{2 \cdot s_n - 1}{3}$ si entier. Si l'on voulait continuer dans ce sens, pour avoir tous les précédents possibles il faudrait alors faire un arbre et on n'en finirait plus avec tous les chemins possibles. Au lieu d'arbres inextricables et, cerise sur le gâteau, infiniment nombreux, il faut faire une matrice, matrice qui sera telle que ci-dessous:

(A_{20})	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

- Nous limitons le tableau à 20 × 20 pour raisons de lisibilité mais il va de soi que cela s'étend à l'infini et en lignes et en colonnes.
- Toujours pour lisibilité nous nous abstenons d'y marquer les zéros; en fait ce sont les éléments les plus nombreux.
- Nous garnissons la diagonale bleue de "1", pour des raisons techniques.

Lecture du tableau:
La barre de titres horizontale concerne les entiers appelés à être des antécédents et la barre de titres verticale concerne les entiers appelés à être des suivants

Voyons par exemple quel est le suivant de 8: on lit verticalement sous le 8 de la barre de titres horizontale et on trouve 4 après ricochet horizontal sur le 1 (i.e. (4 8)). <u>On ne s'intéresse pas aux "1" de la diagonale</u>. Quel est le suivant de 11? On trouve 17 de la même façon.

Quel est l'antécédent de 7? On lit horizontalement à droite du 7 de la barre de titres verticale et on trouve 14 après ricochet vertical sur le 1 (i.e. (7 14)).

Quel est l'antécédent de 8? Il y en a, non pas un, mais deux: ce sont 5 et 16, qui correspondent aux deux "1" de la ligne 8. <u>On ne s'intéresse toujours pas aux "1" de la diagonale</u>.

Embrassons maintenant tous les antécédents possibles de 1 et ce, avec l'espoir que l'ensemble de tous ces antécédents possibles se confonde avec celui des entiers positifs.

Il faut en principe élever cette grande matrice (appelons-la ici A_{20} puisque nous avons arrêté les indices à 20) à la puissance infini

Pratiquement on prendra une matrice finie qu'on manipulera puis on passera à la limite sur l'ordre de cette matrice

Au fur et à mesure qu'on multiplie A_{20} par elle-même les lignes 1 et 2 vont tendre à se garnir de plus en plus (c.f. plus bas)

Les valeurs propres de A_{20} sont 0 (simple), 1 (multiple), et 2 (simple) et il n'y en a pas d'autres. Cela est démontrable, sans gros calculs vu la forte proportion de zéros, par développements successifs du déterminant sur colonnes idoines. *On pourra aussi bien vérifier cela par un calcul direct sur une petite A, par exemple A_5 (Convenons que A_n voudra dire une A dont nous aurions arrêté les indices à la valeur maximale n), puis élargir vers A_6, puis A_7, etc., ce qui donnera à chaque fois une valeur propre supplémentaire de 1, et rien d'autre et ce, à cause de la diagonale qui ne comporte que des "1" et du fait que la somme des termes diagonaux vaut celle des valeurs propres; en effet à chaque passe la somme des valeurs propres se trouvera incrémentée du seul 1*[i].

---

[i] De mauvaises langues pourront rétorquer que même si on élargissait d'un cran une petite matrice A, la somme des valeurs propres (trace) augmenterait certes de 1 mais rien ne garantirait que les valeurs propres

Tout vecteur ligne de dimension compatible avec celles de $A_\#$, multiplié à sa droite par $A_\#$, $A_\#$^2, $A_\#$^3, …, $A_\#$^k, … (*k* allant vers l'infini) verra sa direction tendre vers celle du vecteur propre correspondant à la valeur propre 2. Or un vecteur propre de A_∞^t, transposée de A_∞, qui correspond à la valeur propre 2, est notamment (1; 1; 1; 1; …). Cela est facilement vérifiable directement. Appelons sa direction "direction centrale".

Illustrons sur notre matrice limitée A_{20}^t ou A_{20} (foin de la normalisation automatique si l'on utilisait un logiciel; nous n'en avons pas besoin):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1

La première ligne, ce sont les numéros des composantes d'un vecteur envisagé, quel qu'il soit. La deuxième ligne, c'est un vecteur propre de A_{20}^t pour la v.p. 2. Vu la présence des zéros (en jaune), ce n'est pas la direction centrale et cela est dû à la limitation de cette matrice. Avec A_∞^t il n'y aurait pas de zéros sur cette ligne et l'on aurait la direction centrale dans ce cas.

Mais alors d'où viennent ici les zéros jaunes et pourquoi ne sont-ils pas des "1"? Parce que les "altitudes maximales" respectives des listes des suivants de 7, 9; 11; 14; 15; 17; 18; et 19 se trouvent être supérieures au maximum choisi d'indices, 20 (*Par exemple pour 7, c'est 26 >20, pour 19 c'est 44 > 20; par contre pour 16, c'est 16 <20, etc …*)

Mais dans le cas de A_∞^t les lignes (*"lignes": c'est pourquoi nous avons parlé ci-dessus de A^t plutôt que de A à propos des valeurs et vecteurs propres*) 1 et 2 de A_∞ vont être complètement remplies, ce qui démontre la conjecture si l'on réussit un passage à la limite vers l'infini sur l'ordre de A.

Avant d'aller plus loin, remarquons que:

- Si l'on fait les sommes des valeurs colonne par colonne de A_∞, on obtient les valeurs {1 2 2 2 2 2 2 …}
- Si l'on fait les sommes des valeurs ligne par ligne de A_∞, on obtient les valeurs {1 2 3 <u>2 2 3</u> <u>2 2 3</u> …}

… et cela se renverse s'il s'agit de A^t_∞.

Conséquence: si l'on multiplie A_∞ (*Pour fixer les idées, à sa gauche*) par un vecteur (*ligne*) de direction centrale, par exemple {0 1 1 1 1 …}, alors on obtient le vecteur, lui aussi central, {0 2 2 2 …}, ce qui signe la valeur propre 2 de notre matrice et nous approchons de la démonstration rigoureuse.

<u>Deuxième partie (intéressante mais pourrait être inutile pour la démonstration demandée)</u>

Il y a encore des comportements féériques de triangle de Pascal:

Prenons par exemple le nombre 7, qui a les suivants

11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1

d'avant l'élargissement resteraient toutes inchangées après, sans fluctuation. Cette garantie n'est pas impossible à démontrer mais tenons-nous en à l'essentiel

C'est-à-dire qu'il faut 11 passes pour atteindre 1 et finir. 11 passes, ce n'est ni trop peu de façon à ne rien voir, ni trop de façon à ne plus en finir.

Sur la matrice A_{20} et à la *colonne* 7, on lit deux "1": celui de la diagonale (*cette fois-ci, pour les triangles de Pascal, les "1" de la diagonale vont entrer dans le jeu, contrairement à ce qui était plus haut à propos des précédents\suivants*) et celui de la ligne 11; 11 qui est le suivant de 7. {1 1}, c'est la *ligne* 1 du triangle de Pascal.

Élevons A_{20} au carré (*pour ne pas encombrer ce texte nous laissons au lecteur le soin de le faire mais il faudra prendre pour A un ordre bien supérieur à celui de 20 adopté ici*): toujours à la *colonne* 7 il y aura, d'une manière analogue, les suivants 11 et 17. Les nombres portés par, toujours, cette *colonne* 7, seront 1; 2; et 1. {1 2 1}, c'est la *ligne* 2 du triangle de Pascal.

Et au cube de A[ii], à la colonne 7, il y aura les {1 3 3 1} de la ligne 3 du triangle de Pascal et les lignes où ils se trouveront signeront les suivants 11, 17 obtenus déjà, et 26. Remarquons que chaque fois que nous obtenons un nouveau suivant d'une puissance de A à la suivante, ce dernier aura été donné par un "1". C'est là un fait général.

Or 26 est maintenant un nombre pair. Que va-t-il se passer à la prochaine puissance de A? Rien, si ce n'est que le dernier "1" des {1 4 6 4 1} de la ligne 4 du triangle de Pascal n'est plus leur dernier sur la colonne 7 mais il faut bien voir que ces {1 4~~~} sont tous présents bien qu'ils ne soient plus en ordre "de Pascal".

Si l'on continue comme ça de puissance en puissance de A on trouvera un nouveau suivant à chaque fois, donné par le "1" non diagonal, ainsi qu'une ligne du triangle de Pascal (elle se présentera en colonne sur A^# bien entendu) correspondant à la puissance correspondante de A, ligne dont les éléments ne seront pas en ordre "de Pascal".

Et à la puissance 11 (nombre des passes nécessaires en partant de 7, pour finir) de A, le "1" non diagonal s'y trouvera à la ligne 1. C'est un point essentiel.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1024	1024	848	1023	968	638	1	1013
2	0	1024	1024	968	1024	1013	848	11	1023
3	0	0	0	1	0	0	11	0	0
4	0	0	0	165	1	55	330	55	11
5	0	0	0	11	0	1	55	330	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	55	0	11	165	165	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	462	0
11	0	0	0	0	0	0	0	11	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	330	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[ii] Lorsque aucune confusion n'est possible, nous ne traînerons plus le 20 en indice sur A

17	0	0	0	0	0	0	0	55	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	462	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	165	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Avant de poursuivre, remarquons que la somme des nombres de n'importe quelle colonne, par exemple ici 7, est égale à 2^{La puissance concernée de A}. Pour la puissance 11 de A ce sera 2^11= 2048 et les exceptions qu'on trouve pour telle ou telle colonne sont dues à notre limitation de A, qui devrait être en principe d'ordre infini. De plus le nombre des éléments non nuls de cette colonne a été égal à {La puissance concernée de A + 1}, soit ici 12 (*Résumons-nous: de puissance en puissance de A, ce nombre a été 2; 3; 4; ~~~~; 11;12*)

Pour faire court, nous avons à la puissance 11 de A et en colonne 7 les listes suivantes de ce qui est non nul:

Suivants de 7	La 11eme "ligne" du triangle de Pascal	C'était l'ordre dans lequel ces nombres se présentent sur A^11, les suivants de 7 s'y présentant bien entendu par ordre croissant.	Suivants de 7	La 11eme "ligne" du triangle de Pascal, <u>ainsi bien arrangée</u>
1	1	Cette présentation ne parle pas. Faisons mieux que ça: Arrangeons les suivants de 7 selon leur ordre naturel. Cela donne les colonnes de droite	7	1
2	11		11	11
4	55		17	55
5	330		26	165
7	1		13	330
8	165		20	462
10	462		10	462
11	11		5	330
13	330		8	165
17	55		4	55
20	462		2	11
26	165		1	1

Que se passera-t-il ensuite à partir de la puissance 12?

Dans ce cas le nombre des non nuls de la colonne 7 de A ne croîtra plus de puissance en puissance: il sera à jamais de 11 + 1 = 12 mais la formule {2^{La puissance concernée de A}} pour la somme reste toujours valable (sous réserve bien entendu des quelques défaillances sur d'autres colonnes çà et là, dues à notre limitation de A). Comment cela?

Voyons ce qui se passe pour la puissance 12 et remarquons au passage que le "1" non diagonal a disparu (*et il ne reparaîtra d'ailleurs plus pour les puissances ultérieures*)

Suivants de 7 (ordre croissant sur A)	La 12eme "ligne" du triangle de Pascal **perturbée**		Suivants de 7 (ordre naturel)	La 12eme "ligne" du triangle de Pascal **perturbée**
1	12		7	1
2	**67 = 66 + 1**		11	12
4	220		17	66
5	792		26	220
7	1		13	495
8	495		20	792
10	924		10	924
11	12		5	792
13	495		8	495
17	66		4	220
20	792		2	**67 = 66 + 1**
26	220		1	12
	Somme 2^12			**Somme 2^12**

Sur la ligne 2 de A^12 il y a 67 alors que "pascalement" il devrait y avoir 66. C'est que le "1" non diagonal qui avait disparu a été s'ajouter au 66 de la ligne 2 pour donner 67 et ainsi donner une somme globale à notre colonne 7 de, toujours, 2^12, et non pas (2^12 – 1) comme on pourrait le craindre de prime abord.

Plus loin prenons par exemple la puissance 18 pour A:

Suivants de 7 (ordre croissant sur A)	La 18eme "ligne" du triangle de Pascal **perturbée**		Suivants de 7 (ordre naturel)	La 18eme "ligne" du triangle de Pascal **perturbée**	
1	**41226**		7	1	Triangle de Pascal OK
2	**65536**		11	18	
4	48620		17	153	
5	31824		26	816	
7	1		13	3060	
8	43758		20	8568	
10	18564		10	18564	
11	18		5	31824	
13	3060		8	43758	
17	153		4	48620	
20	8568		2	**65536**	Explication ci-dessous
26	816		1	**41226**	
	Somme 2^18			**Somme 2^18 également**	
Nombre de passes 11			La séquence de Pascal est bonne avant les		

		deux derniers nombres en gras mais la formule de la somme (puissance de 2) reste intacte malgré la troncature de queue (ou décapitation si l'on regarde plutôt la partie gauche du tableau) de cette "ligne"….

….Cette formule reste intacte car les nombres de Pascal qui suivent le 48620 se sont, pour employer un langage imagé, enroulés sur nos deux dernières lignes en gras:

65536 + 41226 = 43758 + 31824 + 18564 +8568 + 3060 + 816 + 153 + 18 + 1	
Remarquons aussi que les nombres ci-dessus qui étaient dernier et avant-dernier en ordre naturel quant aux suivants de 7 sont premier et second quand ces suivants de 7 sont en ordre croissant	En bleu les éléments de cette "ligne" de Pascal qui suivent le 48620 Qui plus est: si l'on additionne les nombres de rang impair de cette liste on obtient le **65536** et si l'on fait de même avec les autres (i.e. rang pair) on obtient le **41226**