

Carnet de route du Séminaire de la Détente Mathématique

Notes prises par Léo Dort

pour l'exposé du

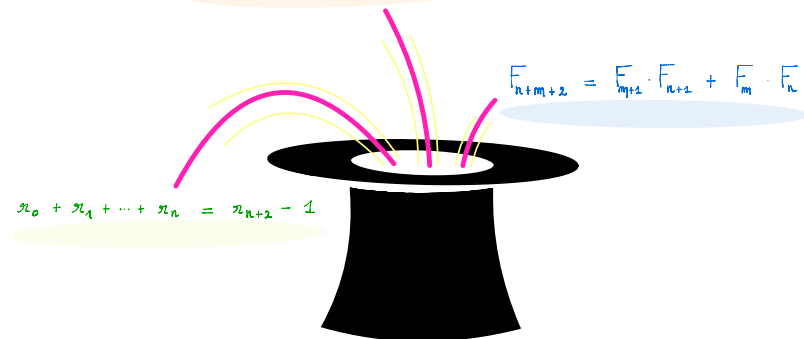
27 janvier 2021 par Valentin Rapenne

Les Formules Magiques

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}$$

$$F_{n+m+2} = F_{m+2} \cdot F_{n+2} + F_m \cdot F_n$$

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_{n+2} - 1$$



nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de faire des calculs longs et fastidieux pour démontrer des formules. Parfois il suffit de raconter des histoires et de faire des dessins ! C'est ce type de formules qu'on va appeler Formules Magiques.

I. Des Histoires ...

On note $\binom{n}{k}$ ^{k parmi n} le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Mais voyons le plutôt comme le nombre possibles d'assemblées de k personnes dans une population de n personnes.

Commençons avec une mise en jambe : la formule du triangle de Pascal.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Début de l'histoire

Un village de n habitants souhaite élire k personnes au conseil municipal. Bob, un citoyen du village se demande combien de conseils municipaux il est possible de constituer.

Bien sûr, au vu de la définition donnée précédemment, il y en a $\binom{n}{k}$.

Mais dans chacun de ces conseils municipaux :

- soit Bob fait partie du conseil, et dans ce cas-là, il reste à élire $k-1$ personnes parmi les $n-1$ habitants. Ce qui fait $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités ;
- soit Bob ne fait pas partie du conseil, et dans ce cas-ci, il faut élire les k conseillers municipaux parmi les $n-1$ villageois restants. Ce qui fait $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

On retrouve bien la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

nombre de conseils
municipaux possibles = nombre de conseils
municipaux sans Bob + nombre de conseils
municipaux avec Bob

Fin de l'histoire 

Intéressons-nous alors à une formule un peu plus compliquée :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Comme avant, on va s'intéresser au nombre de conseils municipaux mais cette fois-ci avec un maire à sa tête. On peut constituer un tel conseil de deux manières différentes :

- on constitue le conseil, puis on choisit le maire parmi les k membres du conseil. Ce qui nous donne $k \cdot \binom{n}{k}$ possibilités.

nombre de maires possibles
parmi les k membres du
conseil

nombre de conseils
municipaux possibles

- ou on élit d'abord le maire (qui fait partie du conseil municipal), puis on élit le reste du conseil parmi les villageois qui restent. Ce qui nous donne :

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1} \text{ possibilités.}$$

nombre de maires possibles
avant élection du conseil

nombre de conseils
municipaux avec le maire
déjà élu

On retrouve bien notre formule magique :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Terminons par une formule beaucoup moins intuitive :

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}, \quad \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

Supposons qu'un nouvel habitant, disons Michel, s'installe au village. Il y a donc à présent $n+1$ villageois.

Nichel convainc le village d'élire un nouveau conseil municipal de $2k+1$ habitants. Il y a donc $\binom{n+1}{2k+1}$ conseils municipaux possibles.

Mais Michel propose une toute nouvelle méthode d'élection.

→ étape 1 : on classe les habitants par âge croissant

→ étape 2 : on tire une personne au sort qui fera partie automatiquement du conseil : on appelle cette personne pivot.

⚠ Mais attention, cet habitant ne doit être ni trop jeune, ni trop âgé ! Il doit y avoir au moins k personnes plus jeunes, et au moins k personnes plus âgées parmi le reste des habitants.

Dans le classement des âges, le pivot est à la place $m+1$, où $m+1$ doit satisfaire :

$$k < m+1 < n-k$$

au moins k habitants
plus jeunes que le pivot

au moins k habitants
plus âgés que le pivot

→ étape 3 : les m personnes plus jeunes que le pivot élisent entre elles une assemblée de k habitants qui siègeront au conseil, et les $n-m$ habitants plus âgés que le pivot font de même.

→ étape 4 : le conseil municipal est alors formé par le pivot, et des deux assemblées précédentes.

Donc si le pivot est à la place $m+1$, alors il y a

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{k} \text{ conseils municipaux possibles.}$$

assemblée de k habitants
parmi les m personnes jeunes

assemblée de k habitants
parmi les m personnes âgées

Puisque le pivot doit être entre les places k et $n-k$, on peut ainsi constituer

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{k} \text{ conseils municipaux.}$$

place du pivot

D'où la formule magique :

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

Exercice : Retrouver les formules magiques précédentes par le calcul.

II. ... et des Dessins.

Reconnaissez-vous cette suite de nombres ?

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Quel est le prochain terme de cette suite ?

Il s'agit de la célèbre suite de Fibonacci, et on la définit comme suit :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{si } n \geq 0.$$

En faisant quelques calculs (qu'on laisse au lecteur intéressé), on peut montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

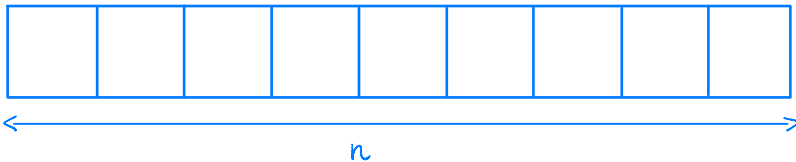
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

C'est une belle formule, mais elle n'est pas magique. Intéressons-nous maintenant à la formule suivante :

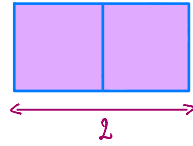
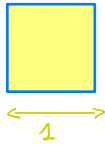
$$F_{n+m+2} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n.$$

A priori rien d'évident. Mais nous allons voir que la suite de Fibonacci possède un lien avec les pavages.

On souhaite paver un rectangle de taille n



avec les deux briques élémentaires suivantes :



Exemple de pavage du rectangle 9 :



On pose $\pi_0 = 1$, et si $n \geq 1$ on note π_n le nombre de pavages du rectangle taille n .

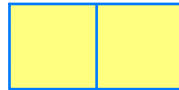
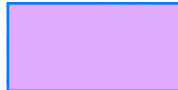
Regardons ce que vaut π_n pour des petites valeurs de n .

(vous pouvez essayer de les trouver par vous-même)

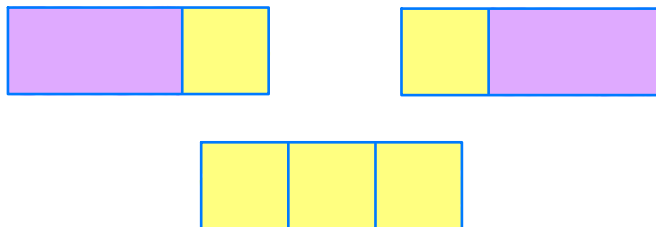
$n = 1$:



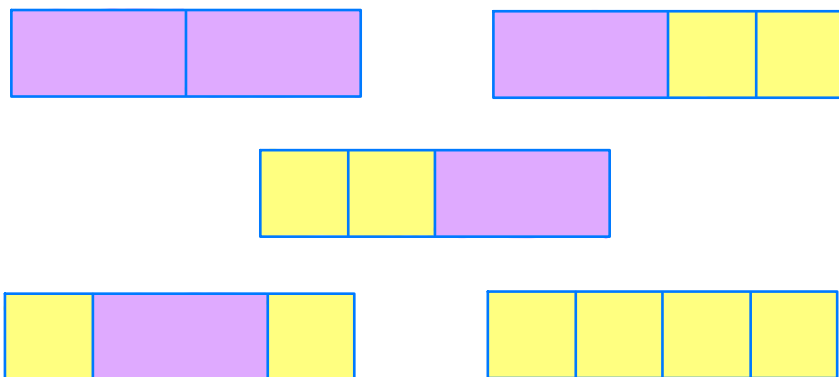
$n = 2$:



$n = 3$:



$n = 4$:



Ainsi on a :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 5 \quad \dots$$

Ça ne vous rappelle rien ?

Il semblerait que :

$$x_n = F_{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

En effet, un pavage d'un rectangle de taille $n+2$

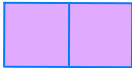
rectangle de taille $n+2$

peut être décrit en fonction de la dernière brique élémentaire qui le compose.

Soit cette dernière brique est . Dans ce cas, il reste

rectangle de taille $n+1$

à paver un rectangle de taille $n+1$. Il y a π_{n+1} pavages possibles.

Soit cette dernière brique est , et dans ce cas, il

rectangle de taille n

reste à paver un rectangle de taille n . Il y a π_n pavages

possibles.

En résumé, on a

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Et puisque $x_0 = F_1$, $x_1 = F_2$ et que $(x_n)_{n \geq 0}$ satisfait la même relation de récurrence, on en déduit que $x_n = F_{n+1}$.



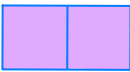
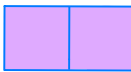
Étudions alors les pavages pour déduire des propriétés sur la suite de Fibonacci.

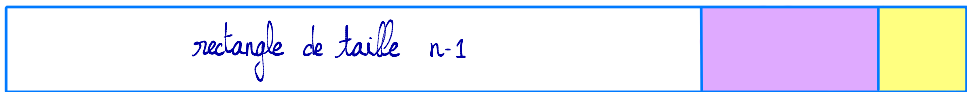
Étudions la première identité suivante :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_{n+2} - 1.$$

Considérons un rectangle de taille $n+2$.

$x_{n+2} - 1$ correspond au nombre total de pavages de ce rectangle, sans compter celui où il n'y a que des briques .

Par ailleurs, s'il n'y a pas de brique , alors il existe une brique  dans le pavage. Intéressons-nous à l'emplacement de la dernière de ces briques .



•
•
•



Si elle est en dernière position, alors il reste un rectangle de taille n à paver, ce qui fait π_n possibilités.

Si elle est en avant-dernière position, alors il reste un rectangle de taille $n-1$ à paver, ce qui représente π_{n-1} possibilités.

En effet, puisqu'on considère la dernière brique , le rectangle après cette dernière n'est pavé qu'avec des briques .

Et ainsi de suite jusqu'à ce que la dernière brique  soit en première position.

Ainsi en distinguant les différents cas possibles, on obtient bien :

$$\pi_{n+2} - 1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_n.$$

Revenons à la formule :

$$F_{n+m+2} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n.$$

D'après ce qu'on a vu, il est équivalent de montrer que

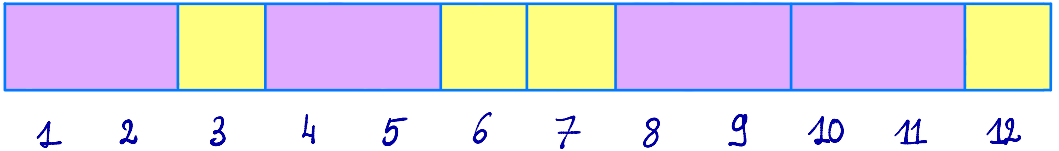
$$\pi_{n+m} = \pi_m \cdot \pi_n + \pi_{n-1} \cdot \pi_{m-1}.$$

Pour démontrer cette formule, introduisons une nouvelle notion.

Définition

On dit qu'un pavage est **cassable** au niveau k , si on peut le séparer en deux pavages, le premier portant sur les k premières cellules et le second sur les cellules restantes.

Exemple :



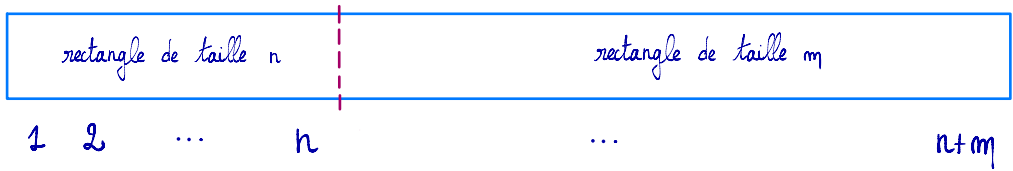
Le pavage ci-dessus est **cassable** en 3, mais pas en 4.

Nous pouvons à présent démontrer notre formule.

π_{n+m} est le nombre de pavages d'un rectangle de taille $n+m$.

On réalise alors une **disjonction des cas** selon que le pavage est cassable en n ou non !

Si le pavage est cassable en n , alors par définition il est la



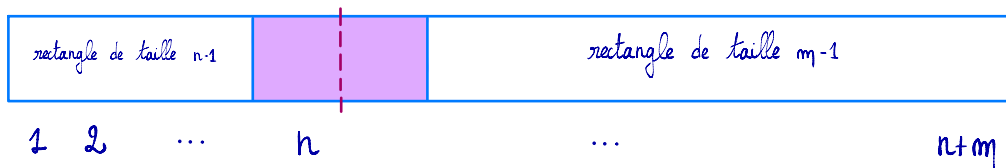
concaténation d'un pavage de taille n , et d'un pavage de taille m . Il y a donc $\pi_n \cdot \pi_m$ possibilités.

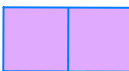
une petite propriété

Puis remarquons qu'un pavage n'est pas cassable en k si, et seulement si, la k -ème cellule du rectangle est la 1^{ère} cellule d'une brique



Par conséquent, si un pavage n'est pas cassable en n , alors en retirant cette brique problématique, on remarque que ce pavage



est la concaténation d'un pavage de taille $n-1$, de la brique problématique , puis d'un pavage de taille $m-1$. Il y a donc $\pi_{n-1} \cdot \pi_{m-1}$ possibilités.

Ainsi on en conclut que :

$$\pi_{n+m} = \pi_n \cdot \pi_m + \pi_{n-1} \cdot \pi_{m-1}.$$

Et puisque $\pi_n = F_{n+1}$, on obtient alors notre formule magique :

$$F_{n+m+2} = F_{n+1} \cdot F_{m+1} + F_n \cdot F_m.$$



Pour terminer, connaissez-vous cette nouvelle suite de nombres ?

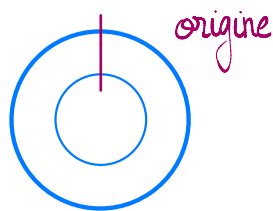
2, 1, 3, 4, 7, 11, 18 ...

Les termes suivants sont 29, 46, etc... Il s'agit de la célèbre **suite de Lucas** ! Elle est définie par la même relation de récurrence que la suite Fibonacci, et seules les conditions initiales sont différentes :

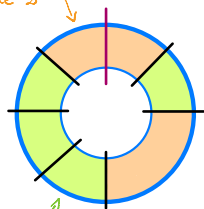
$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1 \quad \text{et} \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{si } n \geq 0.$$

Si nous avons décrit un lien entre la suite de Fibonacci et les pavages de rectangles, nous allons maintenant voir que la suite de Lucas a un lien avec le pavage de cercles.

Pour paver un cercle, on le munit d'un repère qu'on appelle **origine**.



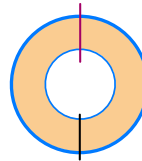
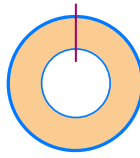
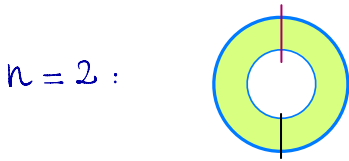
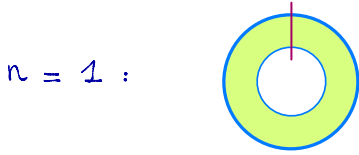
arc élémentaire
de taille 2



arc élémentaire
de taille 1

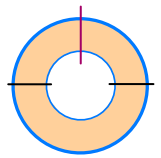
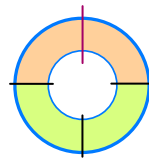
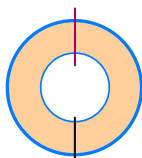
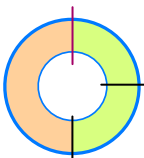
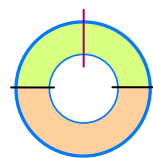
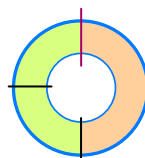
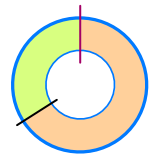
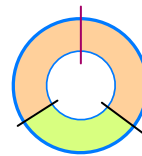
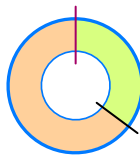
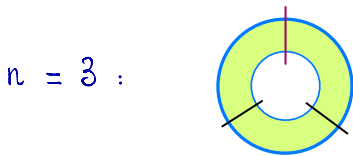
Puis si on coupe le cercle en n parties égales (en partant de l'origine), alors on pave le cercle avec des arcs élémentaires de 1 ou 2 morceaux.

Voici tous les passages possibles pour les petites valeurs de n .



début et se termine
à l'origine
(ne contient pas l'origine)

début et se termine
à la moitié (contient l'origine)



Soit c_n le nombre de pavages du cercles à n cellules.
Alors on peut montrer, de la même manière que précédemment,
que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

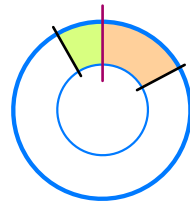
$$c_n = L_n.$$

Exercice : A vous de le démontrer.

Nous avons vu que la suite de Lucas est liée à la suite de Fibonacci. Il est naturel de se demander quelle relation lie les suites $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$?

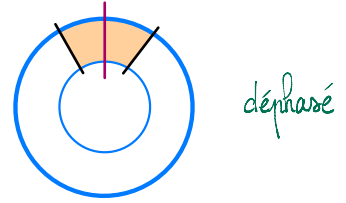
Remarquons que le pavage d'un cercle peut être de deux manières différentes :

$\Rightarrow$ soit l'origine n'est pas contenue
dans un arc élémentaire de taille 2.

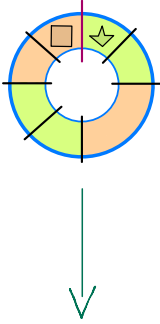


en phase

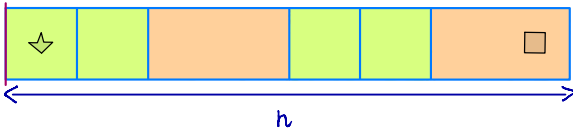
on soit l'origine est contenue dans un arc élémentaire de taille 2.



un pavage
en phase

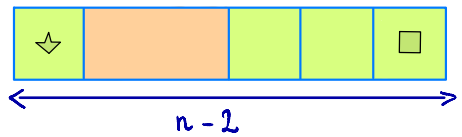
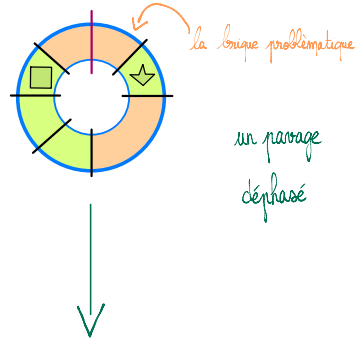


Dans le premier cas, on déroule le cercle pour obtenir un rectangle de taille n pavé.



Dans le second cas, on ne peut pas dérouler le cercle à partir de l'origine puisqu'il faudrait alors casser l'arc élémentaire de taille 2 qui la contient.

On retire donc cet arc problématique, et on déroule le pavage restant pour obtenir un rectangle de taille $n-2$ pavé.



On en déduit ainsi notre dernière formule magique : pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$c_n = x_n + x_{n-2} .$$



Abacadabra !