N, une simple addition suffit :

$$8 + 20 + 4 + 2 + 6 = 40 = 0 \text{ modulo } 10$$

Juste une remarque pour les adeptes de calcul mental : il est inutile de faire l'addition de façon complète. Afin de calculer mentalement et rapidement, on regroupe les termes de somme égale à 10 et on les élimine au fur et à mesure :

$$(8 + 2) + 20 + (6 + 4) = 10 + 20 + 10$$

ce qui donne la simple somme $0 + 0 + 0 = 0$ modulo 10.

AUTRES PROBLÈMES

Comme on a traité...

Si l'on traite ici le problème en $(3x + 1)/2$, on peut envisager tout problème en $(Ax + B)/2$. La Propriété remarquable devient : Y

$$(A - 2).P = I + B.N$$

LA DÉFINITION DES GRAPHES DE SASHA MARTIN

orienta ses travaux en approfondissant

L'Académie royale des sciences exactes d'Ekuidistan s'empara du sujet et approfondissait l'étude des graphes, des matrices et de l'algèbre modulaire. De nombreux graphes furent produits et classifiés. Cependant le très avisé Khan remarqua : « Je ne vois rien là que d'anciens sujets. Dommage, car celui-ci montre beaucoup de subtilité. Trouvez-moi quelque chose ! » Désireux de satisfaire leur puissant mécène, le groupe d'experts *ad-hoc* proposa de définir un nouvel objet mathématique : X

> On appelle *« Graphe de Sasha Martin »* un graphe orienté dont tout ou partie utilise la Propriété remarquable d'un problème en $(AX + B)/2$ et dont tous les circuits sont à coût nul modulo M.

Vu que l'on peut modifier à l'infini un tel graphe tout en gardant sa propriété remarquable, les experts s'avisèrent de produire une définition assez large.

CONCLUSIONS

Les graphes sont des outils mathématiques très puissants. Ici on les a combinés à des opérations algébriques simples et mis en évidence des propriétés difficiles à cerner avec d'autres moyens. Ils sont inévitables en physique et notamment en électronique où l'on manipule des opérations plus complexes. Un ensemble d'outils permettant de bâtir des graphes avec des circuits à coûts constants (modulo N) est proposé. Chacun est invité à faire ses propres recherches et à proposer ses propres graphes.

Supprimer incontournables

ANNEXES

Diverses démonstrations modulo M

Un graphe orienté d'un problème en $(3X+1)/2$ modulo M demande l'étude de $2M$ valeurs au maximum.

Il suffit de changer X en $X+2M$:

1. X pair :
   - a. $Y1 = X/2$;
   - b. $Y2 = (X+2M)/2 = X/2 + M = X/2$ modulo M
2. X impair :
   - a. $Y1 = 3X/2 + 1/2$
   - b. $Y2 = (3X+2M+1)/2 = 3X/2 + M + 1 = 3X/2 + 1/2$ modulo M 1/2

Ainsi pour $M = 6$, étudier les transitions pour valeurs allant de 0 à 11 (ou de 1 à 12) suffit.
les

Un nœud d'un graphe orienté d'un problème en $(3X+1)/2$ modulo M dispose de deux flèches sortantes.

Il suffit de comparer X et $X+M$:

1. X pair :
   - a. $Y1 = X/2$;
   - b. $Y2 = (X+M)/2 = X/2 + M/2$

1/2 M/2 ?

2. X impair :

a. $Y1 = 3X/2 + 1/2$

b. $Y2 = (3X + M + 1)/2 = 3X/2 + M/2 + 1 = 3X/2 + 1/2 \text{ modulo } M$

Les deux nombres issus de X sont distants de $M/2$ pour M pair.

s'il y

Cependant, pour M impair, si l'on a toujours deux flèches sortantes, les relations ne sont ni aussi simples, ni aussi esthétiques.

Ébauche de démonstration de la propriété remarquable $P – I = N$

une preuve de

Si la propriété est lisible en bibliographie, elle y est extrêmement longue (7 pages).

Une autre démonstration existe et on va la commenter avec un exemple. Imaginons que trois termes ($X1$, $X2$ et $X3$) fasse un cycle et que les deux premiers termes soient impairs et le dernier pair. Le cycle peut s'écrire ($I1$, $I2$, $P3$). La description des trois transitions ~~procure~~ un système de trois équations :

fournit

$$\begin{pmatrix} -3.I1 & +2.I2 & +0 & = 1 \\ +0 & -3.I2 & +2.P3 & = 1 \\ +2.I1 & +0 & -1.P3 & = 0 \end{pmatrix}$$

On a simplement appliqué la définition du problème en (3X+1)/2 pour chacun des trois termes en tenant compte de la parité :

• L'écriture a une forme matricielle. Un graphe peut toujours être traduit par une matrice.

éliminant

• On a transformé les relations de la définition de départ en supprimant les dénominateurs. Cela est classique si l'on traite des nombres purement entiers.

déduit

De ces trois équations on en produit une quatrième en faisant la somme, suivant chacune des ~~colonnes~~ :

membres des égalités ou en réduisant

$$(-I1 \quad -I2 \quad +P3 \quad = 2\,)$$

Cette égalité montre que pour tout cycle on a :

• Le membre de droite de cette nouvelle équation est égal au nombre de termes impairs N ;

• Chaque terme X n'apparaît qu'une fois dans le membre de gauche avec :

1. Un coefficient $+1$ s'il est pair ;

2. Un coefficient -1 s'il est impair.

C'est-à-dire que cette dernière équation montre notre propriété remarquable : (ici dans le cas d'un cycle de longueur 3 de la forme choisie)

$$P{-}I = N$$

Avec P : la somme des termes pairs, I : la somme de N et des termes impairs ~~et N~~ : le nombre de termes impairs.

On peut généraliser ~~pour~~ à n'importe quelle forme de cycle. On peut obtenir une relation plus simple si on ~~l'on~~ supprime le terme N et si ~~l'on~~ enlève 1 à tous les termes impairs et si ~~l'on~~ appelle ~~leur~~ somme I'. On obtient la seconde forme de notre propriété remarquable :

supprime

supprimer

$$P{-}I' = 0$$

Pour un problème en $(AX+1)/2$, on peut généraliser la formule :

$$(A-2).P{-}I = B.N$$

BIBLIOGRAPHIE

- Jean-Paul Delahaye, La conjecture de Syracuse *(http://cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/053.pdf)*;
- Pierre-Louis Giscard :

1. Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 1 *(Que-sait-on-compter-sur-un-graphe-Partie-1.html)*,

2. Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 2 *(Que-sait-on-compter-sur-un-graphe-Partie-2.html)*,

3. Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 3 *(Que-sait-on-compter-sur-un-graphe-Partie-3.html)*.

- Shalom Eliahou :

1. Le problème 3n+1 : élémentaire mais redoutable (I) *(Le-probleme-3n-1-elementaire-*

mais-redoutable-I.html),

2. Le problème 3n+1 : cycles de longueur 5 (II) *(Le-probleme-3n-1-cycles-de-longueur-5-II.html)*,

3. Le problème 3n+1 : y a-t-il des cycles non triviaux ? (III) *(Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des-cycles-non-triviaux-III.html)*.

- Keenan Monks et al, Strongly sufficient sets and the distribution of arithmetic sequences in the x + 1 graph, Discrete Mathematics.

- Monks, Kenneth G. « 3x+ 1 Minus the + ». Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5 (2002).

- Gérard Villemin, Cycle de Syracuse *(http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/Syracuse.htm)*.

- Jason Davies. Collatz Graph : All Numbers Lead to One.

QUELQUES LIENS WEB

Différents exemples de graphes : 1 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=qwGpQuaBhQquAOLW)*, 2 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=mwDVZNWRkRrxjbAH)*, 3 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=nXXwTwAaMDXYtlrt)*, 4 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=EyBfbNNmGRMoAebf)*, 5 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=TZRDxchKyvjiXlhy)*, 6 *(http://graphonline.ru/fr/?graph=lexlSGrlyrPGPxfo)*.

Remerciements

L'auteur remercie Olivier Rozier (IPGP - Institut de Physique du Globe de Paris) pour ses recherches bibliographiques.