parmi les entiers ≤ 300 000

centre), où seules figurent quelques valeurs, car le graphe complet a une taille infinie :

1. chaque valeur possible prend place dans un nœud ;

2. chaque successeur est relié à son parent par une flèche allant du parent à son successeur ;

3. chaque valeur n'a qu'un seul successeur ;
4. par contre le nombre de parents est soit 1 soit 2.

On peut parler de graphe de transitions figurées par les flèches.

Arithmétique modulaire

a utilisé

Avec les graphes et le problème en $(3X+1)/2$, Sa-Shah utilise un troisième outil mathématique : l'arithmétique modulaire. Ce sujet est connu depuis semble-t-il le troisième siècle de notre ère. Les historiens l'appelaient « l'étude des restes chinois ».

Si l'on considère une équation comportant des additions, multiplications, soustractions et divisions de nombres entiers, l'équation reste vraie si ~~l'~~on remplace chaque terme X par le reste de la division euclidienne de X par M.

Prenons un exemple. L'égalité :

$$5+8=13$$

devient modulo 6 :

$$5+2=1 \ \text{ modulo } 6$$

Car le reste de la division euclidienne de 13 par 6 donne 1. Pour 8, ce reste est 2.

$$7=1 \ \text{ modulo } 6$$
$$1=1 \ \text{ modulo } 6$$

Car le reste de la division euclidienne de 7 par 6 donne 1.

Regroupement des différents outils mathématiques

On peut traiter le problème $(3x+1)/2$ vu ci-dessus en arithmétique modulaire. Ainsi on choisit un nombre $M=6$ (de préférence un M pair pour simplifier l'étude) et ~~l'~~on transforme tous les nombres par leurs restes obtenus ~~par~~ la division euclidienne par M.

06

remplace dans

Appliquons l'arithmétique modulaire sur le problème en $(3x+1)/2$ modulo 6, sur l'ensemble des nombres entiers positifs et traçons un graphe orienté :

1. On n'a plus que 6 nœuds (soit ici $M = 6$), correspondant aux six restes possibles. On peut les noter $0, 1, 2, 3, 4$ et 5.
2. Cependant on a douze transitions (soit $2M = 12$).

Les démonstrations sont présentées en annexe.

On obtient le graphe suivant (en remarquant 0 = 6 modulo 6) :

ressemble à un "6"

Figure 4 : graphe de Collatz modulo 6.

Ce graphe présente tous les cas possibles du problème en $(3x+1)/2$... modulo 6.
Une fois un graphe obtenu, il est simple de voir que certains circuits sont impossibles (n'oublions pas que nos trois chefs-caravaniers sont revenus à leur point de départ) :

- On peut enlever les arcs $(5-5)$ et $(6-6)$ qui n'ont aucun intérêt pour les caravaniers,
- Ainsi que les nœuds 3 et 6 où il est impossible d'y revenir.

de

(La graphe montre qu'il est impossible de revenir ~~sur les~~ nœuds 3 et 6 une fois que l'on a quitté le nœud 3. La simple analyse du graphe et du sens des flèches montrent qu'un cycle de Collatz ne peut pas comporter de nombre divisible par 3 : propriété que l'on peut ~~le~~ vérifier sur la liste des cycles présentée plus haut.)

qu'on

On obtient un graphe plus simple qui respecte la propriété remarquable modulo 6.

aux

à ce stade, le lien entre les 2 proble[illegible] n'est pas établi.

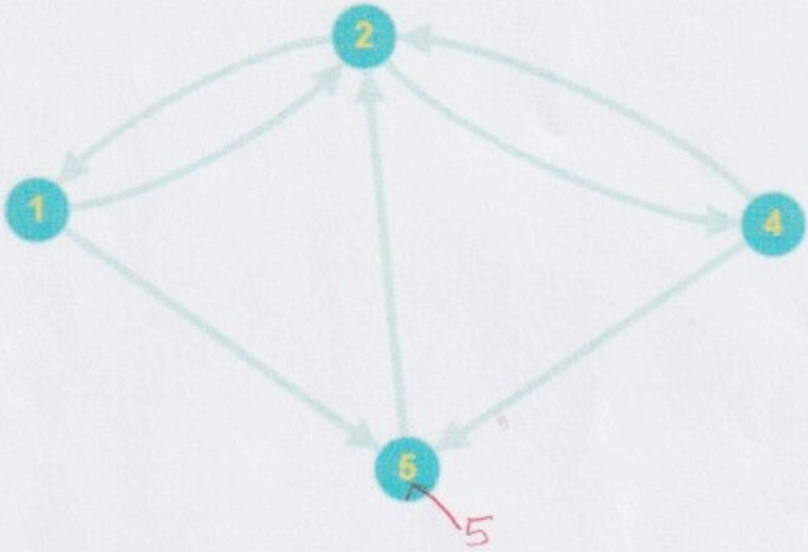

Figure 5 : graphe simplifié de Collatz modulo 6.

Prenons un exemple : le cycle $(2, 1, 5)$ respecte la règle car :

$$P = 2$$
$$I = 1 + 5 = 6$$
$$N = 2$$

Donc on vérifie la propriété remarquable sous sa première forme $P = I + N$ modulo 6 :

$$2 = 6 + 2 \text{ modulo } 6$$
$$2 = 0 + 2 \text{ modulo } 6$$
$$2 = 2 \quad \text{ modulo } 6$$

en conservant

Mais il est possible d'avoir un graphe plus simple à lire, en appliquant la Propriété remarquable vue plus haut sous sa seconde forme. Aussi on fait les trois types de transformation sans changer la propriété remarquable :

le de devient

1. Changer de signe à tous les termes impairs (1 devient -1 et 5 : -5) ; la propriété remarquable devient $P - I = N$.

devient

2. Enlever 1 à tous les termes impairs (-1 devient -2, et -5 : -6 ; la propriété remarquable devient $P - I'' = 0$. On a supprimé N du graphe et de la propriété remarquable.

3. On ajoute un multiple de 6 à tous les termes négatifs (-2 devient 4 ou 10, et -6 : 6 ou 12). Rien n'empêche de faire cette transformation sur ceux positifs.

Résumons par un tableau les différentes étapes :

Tableau de transformations des valeurs des nœuds

Valeur initiale	Parité	Valeur finale
0	Pair	Pas utilisé
1	Impair	$12-(1+1)=10$
2	Pair	2
3	Impair	Pas utilisé
4	Pair	4
5	Impair	$12-(5+1)=6$

Voilà transformé notre graphe de Syracuse modulo 6 qui devient la carte des octrois lue par Sa-Shah plus haut !

MÉTHODES D'AGRANDISSEMENTS DES GRAPHES

Le Khan désire agrandir son royaume. Il faudra définir une autre carte des octrois. Une fois un tel graphe disponible, il est très facile de le modifier, de l'agrandir ou le réduire. Voyons quelques moyens.

Ajouter des villes et des pistes

La première méthode consiste à utiliser plusieurs nœuds ayant la même valeur modulo M. Pour ajouter des nœuds (c'est-à-dire des villes), il suffit de lire l'une des étiquettes et d'y ajouter un multiple de 6. On place le nouveau nœud. Pour ajouter des arcs, il suffit de remarquer que si un arc va de X vers Y, on a le droit de bâtir un autre arc qui va de X modulo 6 à Y modulo 6. En réitérant, le Grand Khan peut « paver » un immense empire, c'est-à-dire dessiner un graphe aussi grand que voulu.

Le graphe ci-dessous montre un exemple en ajoutant le nœud « 12 » qui a les mêmes propriétés que celui en 6 modulo 6 :

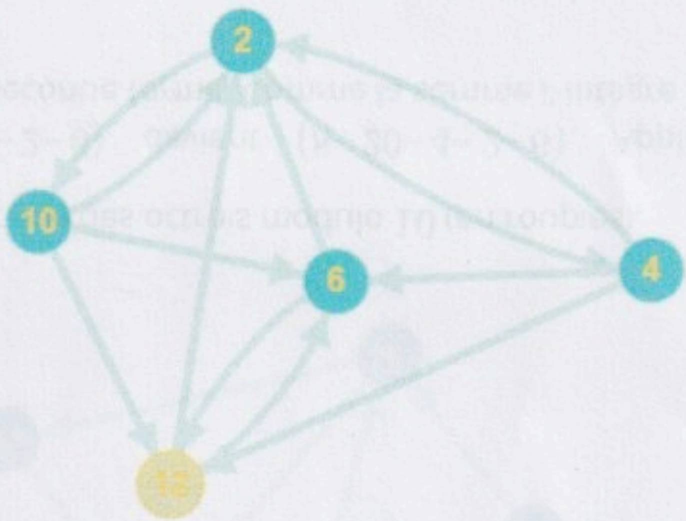

Figure 6 : carte des octrois après l'agrandissement du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

Travailler suivant un modulo différent

Travailler modulo 6 (ou un multiple de 6) montre des propriétés intéressantes : certains nœuds sont absents du graphe final (on rappelle qu'il n'y a pas de cycles de Syracuse avec des nombres égaux à zéro modulo 3). Mais on peut bâtir un graphe suivant n'importe quel modulo pair. En travaillant modulo 10, on obtient le graphe brut ci-dessous :

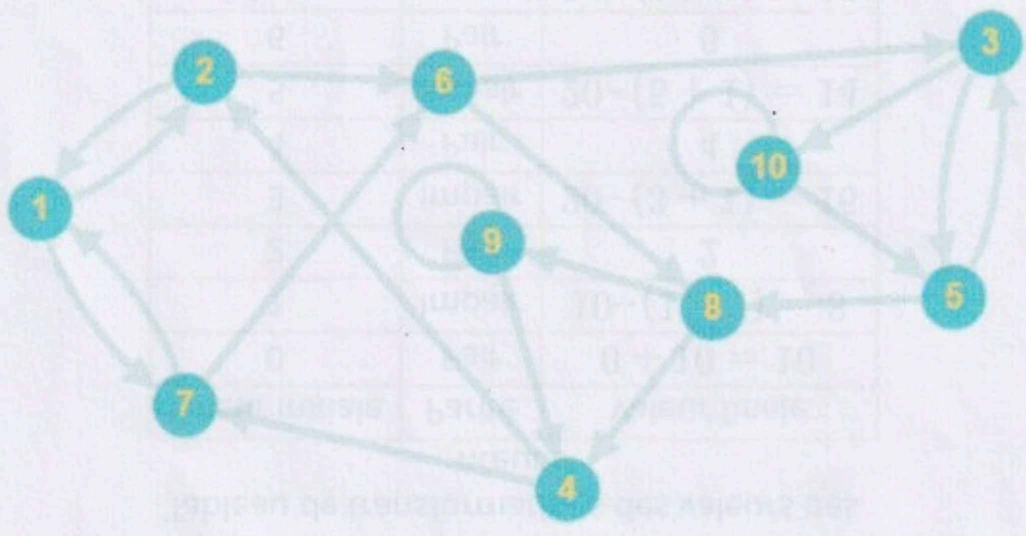

Figure 7 : exemple de graphe « brut » modulo 10.

À nouveau, la propriété $P = I + N$ est peu pratique à lire. Par exemple, la boucle $(8–9–4–2–6)$, se lit :

- $8+4+2+6=9+1$ modulo 10, ou
- $20=10$ modulo 10, ou
- $0=0$ modulo 10.

Si l'on obtient ici le résultat, on veut un graphe plus simple à lire. Utilisons la propriété remarquable sous sa seconde forme $P-I'=0$. Dressons d'abord un tableau :

Tableau de transformations des valeurs des nœuds

Valeur initiale	Parité	Valeur finale
0	Pair	$0+10=10$
1	Impair	$10-(1+1)=8$
2	Pair	2
3	Impair	$20-(3+1)=16$
4	Pair	4
5	Impair	$20-(5+1)=14$
6	Pair	6
7	Impair	$20-(7+1)=12$
8	Pair	8
9	Impair	$30-(9+1)=20$

Puis retraçons le graphe avec les nouvelles valeurs :

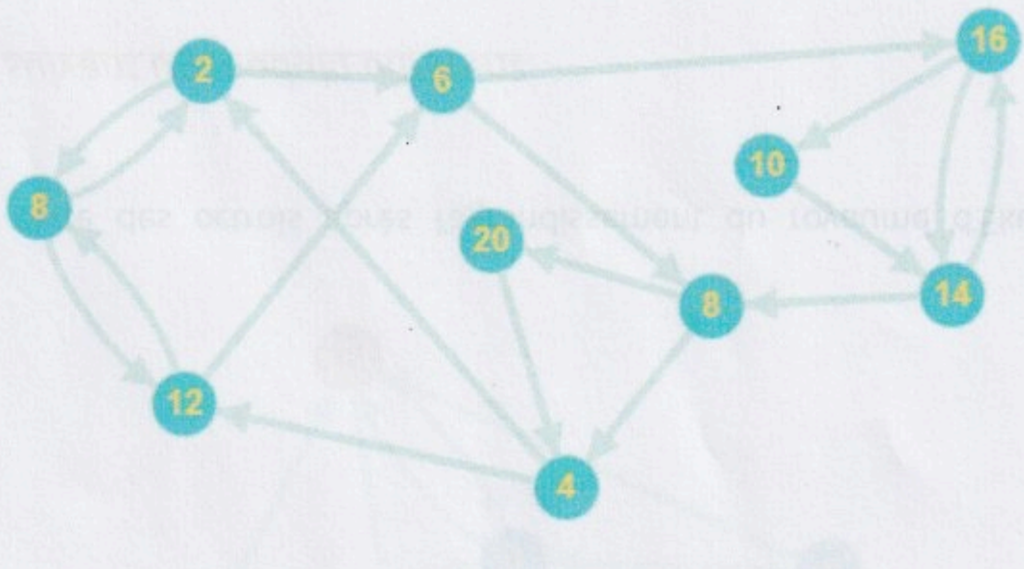

Figure 8 : exemple de carte des octrois modulo 10 (en roupies).

La boucle $(8–9–4–2–6)$ devient $(8–20–4–2–6)$. Appliquons la propriété remarquable sous sa seconde forme. Comme la somme l' intègre le signe – et le compte