IMAGES DES MATHÉMATIQUES

Objet du mois *(-Objet-du-mois-.html)*

LES RICHES CARAVANES DE SA-SHAH

Exemples de graphes orientés avec coûts

Le *27 novembre 2022* - Ecrit par Gay, Philippe *(_Gay-Philippe_.html)*

~~Si~~ suivant l'adage « un petit dessin vaut mieux qu'un long discours », en mathématiques, un graphe vaut mieux que de longs calculs. Cet article montre quelques exemples de calculs de coût sur un graphe qui résume un ensemble de considérations en apparence éloignées les unes des autres.

LES CARAVANES ET LES NOTES DE FRAIS

Jadis, de nombreuses, lourdes et longues caravanes sillonnaient les pistes du prospère royaume d'Ekuidistan. Le très avisé Khan assurait la protection des marchands, qui en contrepartie s'acquittaient d'un octroi dans chaque ville où ils passaient, proportionnel au nombre de personnes, de chevaux, de chameaux et de dromadaires. De plus ils devaient respecter les routes imposées et leur sens de circulation, comme indiqué par ce graphe :

- Les cercles figurent les villes et leurs contenus le prix de l'octroi en roupies ;
- Les flèches montrent les routes possibles avec le sens à respecter.

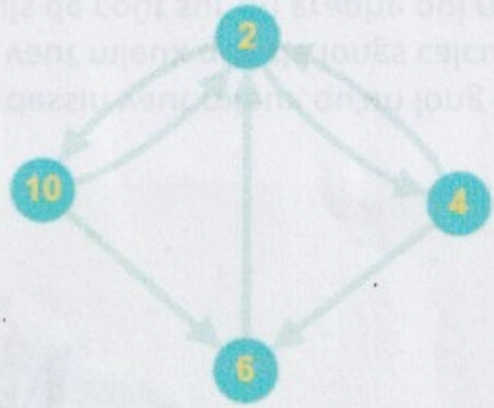


Figure 1 : carte des octrois du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

Les trois chefs-caravaniers, Po-Lo, Ja-Ko et Ar-No, remettent leurs rapports annuels à leur maître Sa-Shah :

« Nous avons sillonné tout le pays et amassé de grandes fortunes. Chacun menait sa caravane. Nous sommes partis de trois villes différentes, puis après de longs mois, nous sommes revenus à nos points de départ. Po-Lo a payé un total de $1\,514$ roupies d'octroi au Grand Khan. Ja-Ko : $1\,824$ roupies. Et Ar-No : $1\,716$ roupies. » Sa-Shah regarde gravement la carte des octrois et les notes de frais. Il demande : « Avez-vous embauché ou débauché du personnel en cours de route ?
— Non !
— Avez-vous vendu ou acheté des bêtes ?
— Non ! »

Sa-Shah, après un pesant silence, annonce : « Je vous félicite du magnifique travail accompli, cependant je constate avec une infinie tristesse que l'un de vous s'est trompé dans ses comptes ! »

Comment le savant Sa-Shah a-t-il pu détecter aussi rapidement une erreur ? Qui passera sa nuit à corriger ses notes de frais ?

LES OUTILS MATHÉMATIQUES DE SA-SHAH

Il nous a confié lesquelles.

notions de

Sa-Shah utilise des bases mathématiques assez variées. Passons-les en revue.

ou éléments

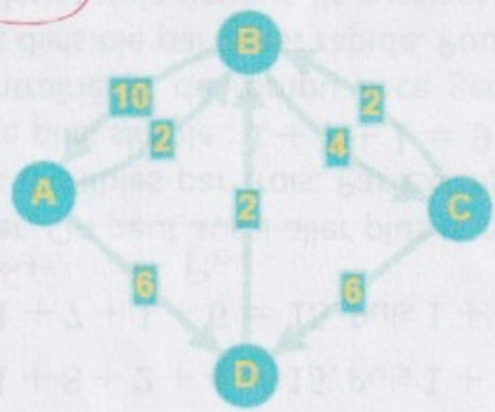
Graphes orientés et coûts

ce qu'on appelle Lorsqu'on

précédente

La carte constitue un exemple de graphe constitué de nœuds pour symboliser les villes et d'arcs orientés pour les routes avec leur sens de circulation. Si l'on va d'une ville à une autre, et que l'on répète l'opération, on suit un chemin. Si les villes de départ et d'arrivée sont identiques, on parle de circuit (à condition qu'il y ait au moins un arc). Ici on peut parler de coûts d'un chemin. Normalement ces coûts sont attachés aux arcs. Le Khan a simplifié leur écriture en les écrivant dans les nœuds. Un graphe plus rigoureux serait le suivant :

qu'on du coût pourvu aurait été



ou prélève récolte

Figure 2 : carte corrigée des octrois du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

par tête

peut observer

Sur cette seconde carte, les valeurs sont portées par les arcs. On constate un cas particulier intéressant : chaque ville voit le même octroi quel que soit le chemin d'arrivée : toutes les flèches arrivantes porte la même valeur. Le premier graphe ~~qui porte la valeur sur chaque nœud~~ est donc une représentation simplifiée du second.

dans lequel chaque valeur est portée par un nœud

Le sage Sa-Shah étudie donc les coûts des trois circuits de ses trois chefs-caravaniers sur un graphe orienté.

le coût

Propriété de ces graphes orientés

elle possède

La carte des octrois est un graphe tout à fait ordinaire, mais qui propose une propriété intéressante que l'on développera par la suite :

qu'on

ou mieux : développée

Si vous avez parcouru un circuit, vous aurez payé un coût divisible par 6.

par

Et ceci quel que soit le point de départ choisi. Repasser plusieurs fois ~~sur~~ le même point de départ ou augmenter le nombre d'étapes n'altèrent pas cette propriété. On note toutefois que Sa-Shah reste attentif et vérifie que les parcours se font à effectifs constants : chaque humain ou bête a fait un circuit complet.

sait

Sa-Shah ~~se souvient~~ qu'un nombre est divisible par 6 si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3. Ces deux cas de divisibilité ne pose pas de problème. Chaque total devra vérifier deux critères.

La première condition est respectée par les trois caravaniers car les trois sommes avancées sont paires.

Concernant la seconde condition, un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est ~~lui~~ aussi divisible par 3 :

elle

- Po-Lo : $1\,514$ roupies. Or $1+5+1+4=11$. Puis $1+1=2$ qui n'est pas divisible par 3.
- Ja-Ko : $1\,824$ roupies. Or $1+8+2+4=15$. Puis $1+5=6$ divisible par 3.
- Ar-No : 1716 roupies. Or $1+7+1+6=15$. Puis $1+5=6$ divisible par 3.

être itéré Pour on peut supprimer

Le procédé peut donc ~~s'itérer~~. ~~On peut aussi aller~~ plus vite ~~en supprimant~~ en cours de route les sommes partielles divisibles par trois. Par exemple, dans $1+7+1+6$, on enlève 6 et on a une somme plus simple : $1+7+1=9$ dont le résultat est divisible par 3. Pour quelqu'un d'entraîné et de rompu à ce genre d'astuces, vérifier qu'un nombre même très long est divisible par 3 est rapide. Pour Ja-Ko et Ar-No, on ne peut pas conclure à coup sûr sur leur totale rigueur. Ils auraient pu se tromper d'un montant multiple de trois, mais Sa-Shah leur laisse le bénéfice du doute. Cependant Po-Lo a ~~évidemment~~ commis une erreur, voire plusieurs.

à coup sûr dix grand

Le problème en $(3x+1)/2$

issu d'un autre champ que celui de la théorie

a utilisé

Sa-Sha utilise un outil mathématique bien distinct des graphes. Ainsi de nombreux systèmes d'équations (équations linéaires, circuits électriques) sont représentables par des graphes. Ici, la carte des octrois repose sur ce qui est appelé le « problème de Syracuse », le « problème en $(3x+1)/2$ » ou « problème de Collatz ». On constitue une suite de nombres en passant d'un terme X à un autre Y en respectant les deux règles suivantes :

au suivant

Dans ce problème

1. Si X est pair, alors $Y = X/2$; À ce jour,
2. Sinon $Y = (3X+1)/2$.

ces 3 lignes, trop rapide !

Supprimer

Ainsi pour 11, le terme suivant sera 17. Si on répète l'opération on obtient : $17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2$ et 1. On peut se demander si l'on peut avoir un terme (en réalité un circuit complet) qui se répète à l'infini infiniment. On ne connaît que ces les « circuits » suivants.

- $1, 2...$
- $0...$
- $-1...$
- $-5, -7, -10...$
- $-17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91, -136, -68, -34...$

(les points de suspension indiquent que la suite de nombres qui les précèdent est répétée infiniment.

auparavant, expliquer la représentation par un graphe

On remarque sur cette liste qu'un seul cycle (ou circuit) est connu pour les nombres strictement positifs, ~~Il en existe~~ et trois autres pour les nombres négatifs.

Il existe une propriété peu connue pour tous ces cycles (si par chance, on en trouvait d'autres, eux aussi la respecteraient.). Elle est importante et démontrée en bibliographie et en annexe.

P ← est égale

> Pour un cycle, la somme des termes pairs P et égal à ~~celui~~ celle des termes impairs I plus le nombre N de ces termes impairs.

Soit la propriété remarquable :

$$P = I + N$$

En réalité on utilisera la propriété remarquable sous une seconde forme :

$$P – I' = 0$$

Comme nous le verrons plus loin

Où P reste la somme des termes pairs et I' est la somme de tous les termes impairs augmenté de 1. Ainsi sur un graphe, on aura une lecture rapide du coût d'un circuit.

permet

Graphe du problème en $(3x+1)$

La littérature abonde sur un problème similaire et qui se définit par :

1. Si X est pair, alors $Y = X/2$;
2. Sinon $Y = 3X + 1$.

Seule la règle 2 est modifiée. De nombreux graphes (modélisant ce problème) sont disponibles sur le web. En voici un ~~exemple~~ :

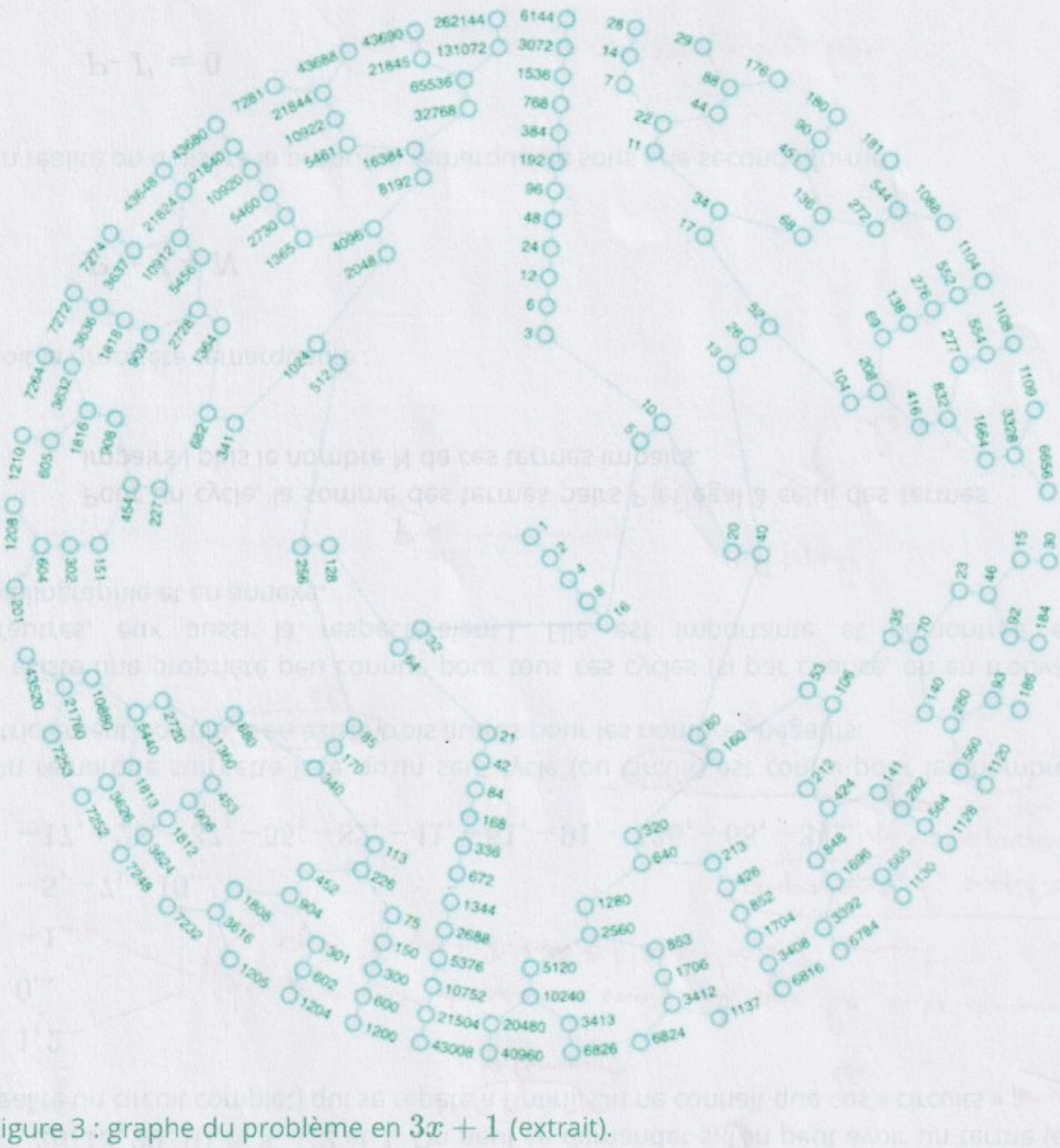


Figure 3 : graphe du problème en $3x + 1$ (extrait).

Il s'agit d'un graphe orienté (il ~~faut~~ faudrait y ajouter les flèches allant de l'extérieur vers le