Racines carrées et nombres rationnels

Des nombres entiers ?— La racine carrée d'un nombre positif c est le nombre positif x tel que $x^2 = c$; on le note $\sqrt{c}$. Par exemple, la racine carrée de 169 est égale à 13. L'opposé $-\sqrt{c}$ vérifie aussi $(-\sqrt{c})^2 = c$; on dit parfois que $-\sqrt{c}$ est la racine carrée négative de c. Ici, seule la racine carrée positive nous intéressera : *nous allons chercher les nombres entiers $n \geq 0$ tels que $\sqrt{n}$ soit un nombre rationnel.* Mais auparavant, posons nous une question plus simple : quels sont les nombres $n \geq 0$ dont la racine carrée est un nombre entier ?

Par définition, les nombres n dont la racine carrée est un entier peuvent être écrits sous la forme $n = m^2$ avec m entier positif. Ces nombres n sont donc les éléments de la liste qui commence ainsi :

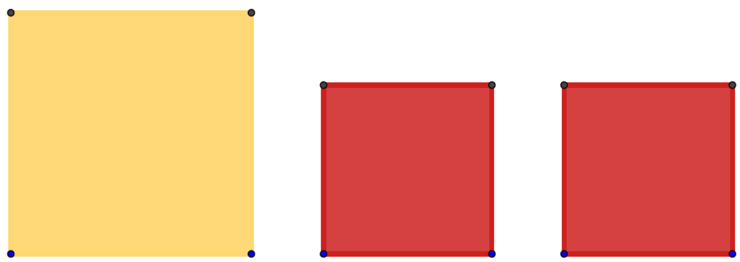
$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, \ldots$$

(le dernier terme écrit, $289 = 17^2$, correspond à $m = 17$). Dans cette liste, l'écart entre le terme m^2 et le suivant $(m+1)^2$ est égal à $2m+1$; les écarts successifs grandissent donc indéfiniment : à chaque fois, l'écart s'accroit de deux unités, passant par exemple de 21 pour $m = 10$ à 23 pour $m = 11$, de 31 pour $m = 15$ à 33 pour $m = 16$, ... Les entiers de la forme m^2 ou, ce qui revient au même, les nombres dont la racine carrée est un entier, deviennent de plus en plus rare à mesure que leur taille augmente.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.— Le premier nombre entier qui n'est pas le carré d'un entier est le nombre 2. Sa racine carrée $\sqrt{2}$ est-elle rationnelle ? Autrement dit, peut-on trouver deux entiers positifs p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$? La réponse est non :

Théorème.– *La racine carrée de 2 n'est pas un nombre rationnel.*

Nous allons donner deux démonstrations de ce théorème, l'une géométrique, l'autre arithmétique. Les deux procèdent d'un raisonnement par l'absurde : nous y supposons que le nombre $L = \sqrt{2}$ est rationnel et l'écrivons sous forme réduite p/q, avec p et q entiers positifs ; il s'agit alors de trouver une nouvelle écriture $L = a/b$ avec a plus petit que p strictement et b plus petit que q strictement, contredisant l'hypothèse initiale de forme réduite.



Démonstration géométrique.– En écrivant $L^2 = 2$ et en multipliant chaque terme par q^2 nous obtenons

$$p^2 = 2q^2.$$

Ceci implique que l'aire d'un carré de côté p (c'est-à-dire p^2) est égale à la somme des aires de deux carrés de côté q, comme sur la figure ci-dessus. Faisons glisser les deux petits carrés rouges à l'intérieur du grand jaune comme ci-dessous. Trois nouveaux carrés apparaissent :

— le carré bleu : c'est là où les deux carrés rouges se superposent ;

— les deux petits carrés verts : ce sont les zones du grand carré qui ne sont pas couvertes par les deux carrés rouges.

En additionnant les aires des deux carrés verts et des deux rouges on obtient donc l'aire du grand carré jaune plus celle du carré bleu, car celui-ci est compté deux fois (une fois par carré rouge). L'aire du carré jaune étant à deux rouges, l'aire du carré bleu est le double de celle d'un vert.

Notons a le côté du carré bleu et b celui du vert ; alors l'égalité que nous venons d'établir correspond à l'équation $a^2 = 2 \times b^2$. Ainsi $(a/b)^2 = 2$ et $\sqrt{2}$ est donc aussi égal au nombre rationnel a/b. Mais a et b sont des entiers positifs strictement plus petits que p et q : plus précisément, $b = p - q$ et $a = 2q - p$. Donc l'écriture $\sqrt{2} = p/q$ ne pouvait pas être une forme réduite. □

Démonstration géométrique sans la géométrie.– En oubliant le cheminement géométrique précédent, mais en relisant le dernier paragraphe de la démonstration, nous obtenons une démonstration plus courte. Partant de $L = p/q$ avec $p^2 = 2q^2$, définissons $a = 2q - p$ et $b = p - q$. Puisque $1 < L < 2$ nous savons que $q < p < 2q$; ceci montre que $0 < a < p$ et que $0 < b < q$. Par ailleurs, $a^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 = 6q^2 - 4pq$ et $b^2 = p^2 - 2pq + q^2 = 3q^2 - 2pq$. Donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a/b est aussi égal à $L = \sqrt{2}$, ce qui contredit l'hypothèse de forme réduite pour p/q. □

Démonstration arithmétique.– Nous utiliserons la remarque suivante : *le carré d'un nombre impair est impair*. En effet, un nombre impair est de la forme $2k+1$, son carré est alors égal à $4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$ et est donc impair.

Revenons à la démonstration du théorème. En écrivant $L^2 = 2$ et en multipliant chaque terme par q^2 nous obtenons $p^2 = 2q^2$. Ceci montre que 2 divise p^2. Ainsi, p est pair et peut être écrit sous la forme $p = 2a$ où a est l'entier obtenu en divisant p par 2. En remplaçant p par $2a$, l'équation $p^2 = 2q^2$ devient $4a^2 = 2q^2$; elle fournit la relation $2a^2 = q^2$, ce qui montre que q est pair aussi et peut-être écrit sous la forme $q = 2b$. La fraction p/q n'était donc pas sous forme réduite puisque $p/q = (2a)/(2b) = a/b$. C'est la contradiction cherchée. □

■ **Irrationnalité.—** Nous allons maintenant reproduire la démonstration « arithmétique » pour démontrer le théorème suivant.

Théorème.– *Les entiers $n \geq 0$ dont la racine carrée est un nombre rationnel sont les entiers qui sont les carrés d'un nombre entier.*

Autrement dit, $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel si et seulement si $\sqrt{n}$ est un entier, si et seulement s'il existe un entier m tel que $n = m^2$: on retrouve la liste du premier paragraphe. Ainsi, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ..., ne sont pas rationnels. Ce ne sont donc pas des nombres décimaux ; ces derniers, en effet, sont les nombres rationnels qui peuvent être écrits sous la forme p/q avec q une puissance de 10 : $q = 10^k$ pour un entier $k \geq 0$.

Démonstration arithmétique.– Nous utiliserons l'existence et l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers. Ceci remplacera le fait, utilisé pour étudier $\sqrt{2}$, que le carré d'un nombre impair est impair. Supposons que $\sqrt{n}$ soit un nombre rationnel, que l'on écrit sous forme réduite p/q. Alors $p^2 = n \times q^2$. Notons $p_1, \ldots, p_k$ les facteurs premiers de p, et $q_1, \ldots, q_\ell$ les facteurs premiers de q ; les nombres premiers qui apparaissent sont deux-à-deux distincts (si des facteurs premiers de p et q coïncidaient, la fraction p/q ne serait pas réduite car on pourrait simplifier numérateur et dénominateur par ce facteur premier). Les facteurs premiers de p^2 sont les mêmes que ceux de p, simplement les exposants sont multipliés par 2. Par exemple, si $p = 63 = 3^2 \times 7$ alors $p^2 = 3969 = 3^4 \times 7^2$. Pourtant, la relation $p^2 = n \times q^2$ montre que les facteurs premiers de p sont ceux de n et de q^2 : les q_j devraient donc apparaître dans la liste des p_i. C'est la contradiction cherchée. $\square$

■ **De bonnes approximations.—** Même si $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il existe de très bonnes approximations par des nombres rationnels. Par exemple, son développement décimal commence par 1.414, donc

$$|\sqrt{2} - \frac{1414}{1000}| = |\sqrt{2} - \frac{707}{500}| < \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Mais l'on peut faire beaucoup mieux. Par exemple, $|\sqrt{2} - \frac{99}{70}| < 8 \cdot 10^{-5}$. L'approximation est meilleure car les quatre premiers chiffres après la virgule sont exacts (au lieu de trois) et les entiers $p = 99$ et $q = 70$ utilisés pour la fraction sont bien plus petits que 707 et 500. Avec la fraction $17/12$, on obtiendrait déjà les deux premières décimales.