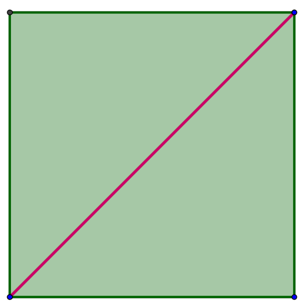
Racine carrée de 2

La diagonale d'un carré.— Considérons un carré dont les côtés ont une longueur égale à 1 (disons à 1 centimètre pour fixer les idées), et traçons l'une des diagonales du carré, comme sur la figure suivante. Quelle est la longueur L de cette diagonale ? à peu près 1.4 : c'est ce que l'on obtient en mesurant la diagonale avec une règle graduée. Mais ceci n'est qu'une valeur approchée, nous verrons bientôt comment mieux évaluer L.



Carré de côté 1

Appliqué au triangle formé de deux côtés adjacents du carré et de la diagonale associée, le théorème de Pythagore fournit l'équation

$$L^2 = 2.$$

Il s'agit, en effet, d'un triangle à angle droit dont la longueur de l'hypoténuse (le grand côté) vaut L ; puisque la longueur des côtés du carré vaut 1, on obtient bien $L^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Nous avons donc maintenant deux points de vue pour appréhender L : c'est la longueur de la diagonale du carré – en particulier L est positif – et c'est un nombre vérifiant $L^2 = 2$.

Par définition du terme *racine carrée*, L est donc la racine carrée de 2. Plus généralement, la racine carrée d'un nombre positif c est le nombre $x \geq 0$ tel que $x^2 = c$. On la note $\sqrt{c}$. Ainsi,

$$L = \sqrt{2}.$$

■ **Développement décimal.—** Nous l'avons dit, L vaut à peu près 1.4 ; un dessin précis montre en fait que L est très légèrement supérieur à cette valeur, si bien que le développement décimal de L doit être de la forme $L = 1.4...$ avec certaines décimales strictement positives parmi les "trois petits points". Faisons deux tests numériques :

— $(1.41)^2 = (1.41) \times (1.41) = 1,9881$ est strictement plus petit que 2 ; donc 1.41 est strictement inférieur à L car L vérifie $L^2 = 2$;

— $(1.42)^2 = (1.42) \times (1.42) = 2,0164$ est strictement plus grand que 2 ; donc 1.42 est strictement supérieur à L.

Ainsi, L est compris entre 1.41 et 1.42 et son développement décimal est de la forme $1.41...$; à nouveau, certains termes parmi ces "trois petits points" doivent être non nuls, car 1.41 est strictement plus petit que L.

Pour déterminer le terme suivant du développement décimal de L, nous pouvons tester successivement les diverses possibilités qui s'offrent à nous ; en ne retenant que les trois premières décimales, on obtient

— $(1.411)^2 = 1.990...$

— $(1.412)^2 = 1.993...$

— $(1.413)^2 = 1.996...$

— $(1.414)^2 = 1.999...$

— $(1.415)^2 = 2.002...$

— etc.

Nous avons arrêté le calcul car ces données suffisent à conclure que L est compris entre 1.414 et 1.415, si bien que son développement décimal démarre par la séquence 1.414. Si nous poursuivions cet algorithme en testant toutes les possibilités pour le chiffre suivant du développement, et si nous répétions cette recherche pour obtenir les dix premières décimales, nous obtiendrions

$$L = \sqrt{2} = 1.4142135623...$$

C'est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ très précise, mais un peu laborieuse à déterminer par la méthode que nous venons de décrire.

■ **Propriétés du développement décimal.—** à la vue des premiers termes du développement, une chose saute aux yeux : le chiffre 0 n'est pas encore apparu. En fait, des 0 apparaissent ultérieurement, et même tous les chiffres apparaissent, comme on le voit en poursuivant le calcul

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016...$$

L'absence de 0 n'était donc qu'un artefact dû à un arrêt prématuré du calcul. Il semble aussi que le développement ne s'arrête jamais ! C'est effectivement une propriété de racine carrée de 2 que nous allons démontrer.

Théorème.– *Le développement décimal de $\sqrt{2}$ ne s'arrête pas : dans l'écriture décimale $\sqrt{2} = 1.41421...$ des chiffres non nuls apparaissent arbitrairement loin.*

Démonstration.– Supposons que le développement s'arrête à un certain stade ; notons alors N la position de la dernière décimale non nulle et a_N le chiffre correspondant. La valeur de $\sqrt{2}$ serait donc de la forme

$$1.41421...a_N.$$

Comme $\sqrt{2}$ est compris strictement entre 1 et 2, nous savons que $N \geq 1$. C'est tout ce que nous allons utiliser.

Calculons maintenant le carré de ce nombre en posant la multiplication

$$\begin{array}{rr} & 1.41421...a_N \\ \times & 1.41421...a_N \end{array}$$

Rappelons le procédé : nous allons multiplier $1.41421...a_N$ par a_N, puis par a_{N-1}, ..., jusqu'aux multiplications par 4 et par 1 ; nous écrirons les résultats l'un en-dessous de l'autre *en décalant convenablement la virgule*, puis nous ferons la somme de tous ces résultats.

La première chose à faire est de multiplier $1.41421...a_N$ par a_N, et la première étape est la multiplication $a_N \times a_N$. Puisque a_N n'est pas nul, $a_N \times a_N$ est l'un des nombres suivants : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. On abaisse le chiffre des unités correspondant, donc par exemple si $a_N = 7$ on abaisse 9 et on retient 4. Quelque soit la valeur de a_N, le premier chiffre que l'on va écrire sera non nul. C'est notre première remarque.

On termine ensuite la multiplication de $1.41421...a_N$ par a_N, puis on décale la virgule : on la décale de N pas vers la gauche en ajoutant des zéros. Ainsi, le tout premier chiffre écrit (le chiffre 9 lorsque $a_N = 7$) se situe au niveau de la décimale numéro $2N$. C'est notre deuxième remarque. Pour continuer l'opération, on doit maintenant multiplier $1.41421...a_N$ par a_{N-1} et décaler la virgule de $N-1$ pas. Ici, le premier chiffre obtenu correspond à la multiplication $a_{N-1} \times a_N$ et il se situera – après décalage de la virgule – en position $2N-1$ (il peut étre nul, par exemple si $a_N = 2$ et $a_{N-1} = 5$). Il est donc situé un cran à gauche du chiffre précédent. C'est notre troisième remarque.

Le même phénomène se reproduit avec les multiplications suivantes, par a_{N-2}, ..., jusqu'à 1. Enfin, on additionne tous les nombres obtenus. D'après ce que nous venons d'expliquer, le premier chiffre obtenu, situé en position $2N$, n'est additionné qu'à des zéros : dans le résultat final de la multiplication, il existe donc un chiffre non nul en position $2N$, avec uniquement des zéros à sa droite. C'est notre dernière remarque. Nous en déduisons que la multiplication ne peut être égale au nombre 2, car le développement décimal de ce nombre n'a pas cette propriété. [1] $\square$

■ **Nombres rationnels, nombres décimaux, nombres réels.—** Le théorème précédent fait apparaître une difficulté intéressante : si le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, quel type de nombre est-ce ? Il n'y a pas de doute, la diagonale d'un carré a bien une longueur, et cette longueur doit certainement correspondre à un nombre tangible, que l'on peut mesurer. Les mathématiciens utilisent plusieurs types de nombres :

— les nombres décimaux, ceux qui peuvent être écrit avec un développement décimal qui ne fait apparaître qu'un nombre fini de chiffres ;
— les nombres rationnels, ceux que l'on peut représenter comme quotient p/q de nombres entiers ;
— les nombres réels, qui ont un développement décimal fini ou infini ;

et aussi les nombres complexes, les quaternions, les nombres algébriques, etc. Pour appréhender plus efficacement $\sqrt{2}$ il faut mieux comprendre la notion de nombre réel et de développement décimal.

---

1. Si l'on écrit $2 = 2,00000....$, il n'y a que des zéros après la virgule. On pourrait aussi écrire $2 = 1,9999....$ avec que des 9 après la virgule ; dans ce cas, il y a bien des chiffres non nuls dans le développement décimal, mais il n'y a pas de 0.

https ://images.math.cnrs.fr/Autoportrait-de-racine-de-2.html
https ://images.math.cnrs.fr/Rationnel-mon-Q.html