petit limbomètre construit dans les dimensions de celui du modèle (*Suppl.*, fig. 17).

On concevra facilement que ce problème peut être exécuté de la même manière pour lever les angles au graphomètre au lieu de la boussole : dans ce cas *Bm* ferait, avec la première oblique *Bg*, un angle tel qu'on voudrait le supposer, imaginée pour calculer les abscisses et ordonnées.

34. Autre application du limbomètre pour déterminer les angles et les côtés d'un pré enclavé dans une forêt, et dont le plan a été levé à l'équerre avec les calculs résultant de ces dimensions (*Suppl.*, fig. 20).

Pour plus de facilité, il faut écrire les angles du limbomètre, puis les combiner deux à deux pour avoir la somme ou chaque angle de la figure.

	Angles saillants.	Angles rentrants.
N ^o 1	108 ^o 30'	
2	170, 00	
3	207, 05	152, 55
4	195, 25	166, 55
5	202, 55	157, 25
6	100, 20	"
7	111, 00	"
8	133, 50	"
9	219, 45	140, 15
10	119, 30	"
11	197, 05	162, 55
12	118, 40	"
13	213, 45	146 15
14	196, 15	163 45
15	185, 55	176, 25
16	125, 40	"
17	101, 00	"
Somme. . .	<u>2700, 00</u>	

$$\text{Les 17 angles} = 180 \times 17 - 2 = 2,700$$

Surfaces.

				hect.	ares.	m. c.	m. c.	fract.
$\pm$	$a = 17.5$	$- 3.4$	$\times 6.05 =$	0.	85.	30.		
	$b = 18.45$	$\times 31.3$	$=$	5.	77.	48.		
	$c = 44.4$	$\times 22.2$	$=$	9.	85.	68.		
	$d = 28.4$	$\times 15.6$	$=$	4.	45.	04.		
	$e = 45.4$	$\times 15. \text{ »}$	$=$	6.	51.	»		
	$f = 54.15$	$\times 24.4$	$=$	13.	21.	26.		
	$g = 55.15$	$\times 16.3$	$=$	8.	98.	94.		
	$h = 50.15$	$\times 15.7$	$=$	7.	87.	35.		
	$i = 40.65$	$\times 59.8$	$=$	16.	17.	87.		
	$k = 29.2$	$\times 19. \text{ »}$	$=$	5.	54.	80.		
	$l = 19. \text{ »}$	$\times 6.2$	$=$	1.	17.	80.		
$\pm$	$m = 19. \text{ »}$	$- 1.7$	$\times 22. \text{ »} =$	3.	80.	60.		
$\pm$	$o = 7. \text{ »}$	$- 1.7$	$\times 18.95 =$	1.	00.	45.		
	$p = 32.2$	$\times 10.7$	$=$	3.	44.	54.		
	$q = 39.6$	$\times 49.5$	$=$	19.	60.	20.		
	$r = 58.5$	$\times 28.7$	$=$	16.	78.	95.		

Total. . . . $\pm 1. 25. 05. 24.$

A déduire $n = 20.1 \times 1.7 = - 54. 17.$

Il reste en $\pm . . . 1. 24. 71. 07.$

ou 1 hectare 24 ares 71 centiares.

§ VII. APPLICATION POUR LES CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES,
DES PERPENDICULAIRES A DEUX AXES.

35. Il est beaucoup plus sûr de ne construire le plan des divers triangles qu'au moyen des perpendiculaires de chaque point à deux axes, calculées comme nous l'avons expliqué au n° 27 : cette méthode est employée dans les exemples d'application que nous donnerons ci-après.

36. Lorsqu'on a à lever le plan d'une grande étendue de terrain, tel qu'un territoire de commune, on établit sur ce territoire un certain nombre de points, que l'on peut apercevoir les uns des autres, ou dont chacun soit visible au moins de deux autres : on détermine la position respective de ces points au moyen des calculs qui résultent du mesurage, tant d'une base AB (*Supplément, fig. 21*) établie sur le terrain, que des angles qui sont à chaque extrémité de cette base les directions de chacun de ces mêmes points : tous les ouvrages de trigonométrie en indiquent les moyens.

Lorsqu'un ou plusieurs, K, L, I, etc., de ces derniers s'éloignent trop de la base mesurée, ou que leurs directions font avec elle des angles trop aigus ou trop obtus, on choisit parmi les points dont on vient de calculer la position, deux de ces mêmes points que l'on juge les plus propres à servir d'extrémités de base à ceux qui restent à déterminer.

37. Si parmi les terrains qui doivent figurer sur le plan dont il s'agit, il se trouve des massifs, tels que des bois, dont les périmètres extérieurs soient situés sur des revers ou dans des parties basses, dont on ne pourrait apercevoir aucun point de l'intérieur du territoire, on sera obligé de lever les plans de ces massifs en les renfermant dans des polygones, tels que A'B'C'D', ACGLK, MrzN, NHxY, etc., (*Suppl. fig. 21*), dont on restreindra plus que possible le nombre des côtés. On déterminera par la triangulation quelques-uns (F, E, I, K, M) des sommets des angles de ces polygones ; on décomposera ces derniers en triangles, qui présenteront un résultat analogue à celui que l'on aurait obtenu si tous les points avaient été visibles des extrémités de la base.

C'est sur les lignes menées d'un signal à l'autre sur les côtés des polygones, enfin par d'autres lignes partant des premières et multipliées tant qu'il sera nécessaire, qu'on lèvera tous les détails que la carte devra présenter, par quelques-uns des moyens indiqués précédemment, en choisissant

parmi eux ceux qui conviendront le mieux à chaque localité.

Et pour fixer les idées sur la marche à suivre, nous donnerons pour exemple l'application suivante :

38. *Calculs de la triangulation établie pour l'arpentage et l'aménagement des bois de la commune des Voivres (Suppl., fig. 21 bis).*

Le triangle ABc , la base AB et le côté Bc établi dans le prolongement du côté gc du quadrilatère $AegL$, jalonné pour lever le bois du Faing-Martin, par le côté AB et deux angles A et B connus.

$$\begin{array}{l} \text{Sin. } 66^{\circ}34' : AB :: \text{Sin. } 57^{\circ}51' : Ac \text{ côtés.} \\ \text{Sin. } 75^{\circ}35' : cB \text{ calculés.} \end{array}$$

		DISTANCE	
		à la	à la
		mérid.	perpend.
Log. AB 554.3	=	54937	
Compl. sin. $66^{\circ}34'$	=	05758	
		58675	
Première somme		58675	
+ log. sin. $57^{\circ}51'$	=	78788	
		57465	
Log. Ac		57465	
		corresp. à	237
		58675	
Première somme		58675	
+ log. sin. $75^{\circ}35'$	=	98610	
		57285	
Log. Bc	=	57285	= 574

Nota. Ces deux côtés Ac et Bc ont, pour vérification, été mesurés

DISTANCE

à la à la
 mérid. perpend.

sur le terrain, et leur mesure est d'accord avec les calculs.

C'est par le point B que nous faisons passer la méridienne à laquelle nous coordonnerons tous les points, ainsi que sa perpendiculaire.

Log. de la distance Bx du point A à la méridienne.	48999	= 509	
	<hr/>		à l'ouest.
+ sin. 60°45'.	94062		
Log. base AB.	= 54957		
Cosinus.	68942		
	<hr/>		
Log. de la dist. Ax du point A à la perpendiculaire.	= 23879	=	173,3 au sud.

LE TRIANGLE Aeg.

Les deux côtés, Ac = 237, cg
 = 579 et l'angle compris.

CALCUL DU CÔTÉ Ag.

Sin. 48°40' : 579 :: sin. 66°34' : A	
Log. sin. 66°34'.	= 96262
Log. 579.	= 76268
Compl. sin. 48°40'.	= 12443
	<hr/>
Log. Ag.	= 84973 = 707,5

DISTANCE

à la à la
mérid. perpend.

579

257

816 : 342 :: tang. 33°17' : tang.
1/2 diff.

Log. 342. = 2,53403

+ tang. 1/2 somme. = 9,81721
ou de 33°17'.

Compl. log. 816. = 7,08851

Log. tang. 1/2 diff. = 9,45955

corresp. à 15°23'

Somme des 3 angles.	}	-	33°17'	+	33°17'
			15°23'		15°23'
			17°54'		48°40'
		+	48°40'		
		+	115°26'		
		180°00'			

CALCUL DE c A LA MÉRIDIENNE.

A la méridienne. = 21405 ci. — 163,7

Ajoutant Bx ci-dessus. + 309

Il reste de la méridienne. 145,3

Sin. 43°42'. = 83940

Log. Ac. = 37463

Cosinus. = 85912

A la perpendiculaire. 23375

	DISTANCE
	à la à la mérid. mérid. perpend.
Corresp. à.	171,3
Ajoutant Ax ci-dessus.	173,3
	344,6
Dist. totale de C à la perp. au sud.	344,6

CALCUL DE g A LA MÉRIDIDIENNE.

Le côté Ac faisant avec la méridienne un

$$\text{angle } cAx' \text{ de } = 43^{\circ}42'$$

qui est égal aussi à l'alterne interne Acn .

$$\text{si l'on ajoute l'angle } g\theta\Lambda. = 113^{\circ}26'$$

$$\text{on a en tout. } \underline{157^{\circ}08'}$$

$$\text{Donc le supplément } mcg. = \underline{22^{\circ}52'}$$

(C'est l'angle que fait avec la méridienne le

$$\text{côté } cg). 180^{\circ}00'$$

$$\text{Log. dist. } g \text{ à la méridienne. . . } \underline{55217} = \underline{225}$$

$$\text{Log. sin. } 22^{\circ}52'. = 58949$$

$$\text{Log. } cg \text{ ou } 579. 76268$$

$$\text{Cosinus. } \underline{96445}$$

$$\text{Log. dist. } g \text{ à la perpendiculaire. } = \underline{72715} = \underline{533,5}$$

Si à la distance de g à la méridienne, ci.

$$225$$

on ajoute celle de c déjà calculée, ci.

$$145,5$$

il y a en tout (à l'ouest).

$$\underline{370,5} \quad 370,5$$

à l'ouest.

DISTANCE

à la à la
 mérid. perpend.

Si à la distance de <i>g</i> à la perpen- diculaire.	=	555,5	
on ajoute la dist. totale de <i>g</i> à la perpendiculaire.		544,6	
		<hr/>	
on aura pour dist. totale de <i>g</i> à la perpend. passant par le point B de la base.		878,1 =	878,1
		au sud.	au sud.

C'est par des calculs du même genre et les combinaisons à la méridienne et à la perpendiculaire passant au point B, que l'on est parvenu à monter le canevas trigonométrique suivant.

TABLEAU présentant le résultat des opérations trigonométriques des bois communaux

Lettres indicatives des sommets.	ANGLES.		LIGNES	
	SOMMETS.		TRIGONOMÉTRIQUES.	
	Objets formant les signaux.	Valeur. deg. min.	Côtés opposés des angles.	Longueur de ces côtés.
A	Signal planté.	75° 35'	BC	374,0
B	id.	37 51	AC	237,0
C	id.	66 54	AB	354,5
		180 00		
A	id.	48 40	CG	579,0
C	id.	115 26	AG	707,5
G	id.	17 54	AC	237
B	id.	37 51	AG	707,5
A	id.	124 15	BG	953,0
G	id.	17 54	AB	354,5
B	id.	74 57	GF	1217,6
G	id.	55 58	BF	1045,0
F	id.	49 05	BG	953
A	id.	51 30	BF	1045,0
B	id.	112 48	AF	1225,0
F	id.	15 22	AB	354,5

métriques faites pour la levée du plan d'aménagement des Voies.

DISTANCES DES SOMMETS D'ANGLES		OBSERVATIONS.
à la méridienne du point B de la base.	à la perpendiculaire menée à cette méridienne par ce point B.	
509 à l'ouest.	173,5 au sud.	On s'est contenté d'écrire une seule fois les distances de cha- que point à la méri- dienne et à sa per- pendiculaire.
» 145,3 ouest.	» 344,6 id.	
» » 370,5	» » 878,1 sud.	
» » »	» » »	
» » 824,5 est.	» » 642,1 au sud.	
» » »	» » »	

Lettres indicatives des sommets.	ANGLES.		LIGNES	
	SOMMETS.		TRIGONOMÉTRIQUES.	
	Objets formant les signaux.	Valeur. deg. min.	Côtés opposés des angles.	Longueur de ces côtés.
F	Perc. plantée.	85° 42'	BE	1085,0
B	id.	22 58	FE	425,5
E	id.	75 20	FB	1045,0
E	id.	28 52	MB	1008,6
M	id.	50 52	EB	1085,0
B	id.	120 56	EM	1817,0
B	id.	49 59	MH	804,1
M	id.	57 29	BH	890,1
H	id.	72 52	BM	1008,6
M	id.	42 54	HR	548,2
H	id.	40 16	MR	525,6
R	id.	97 10	MH	804,1
A	id.	105 12	BH	890,1
B	id.	55 59	AH	739,5
H	id.	22 49	AB	554,3
A	id.	55 59	HI	944,5
H	id.	120 58	AI	1466,8
I	id.	25 43	AH	739,5

DISTANCES DES SOMMETS D'ANGLES		OBSERVATIONS.
à la méridienne du point B de la base.	à la perpendiculaire menée à cette méridienne par ce point B.	
» » 1048 à l'est.	» » 279,9 au sud.	Cette distance ainsi calculée a été trouvée identique avec sa me- sure prise directe- ment sur le terrain.
» 272,1 ouest.	» 971,2 nord.	
» » 808,7 ouest.	» » 371,8 nord.	
» » 975,7 à l'ouest.	» » 919,7 au nord.	
» » »	» » »	
» » 1752,9 ouest.	» » 177,0 nord.	

Lettres indicatives des sommets.	ANGLES.		LIGNES	
	SOMMETS.		TRIGONOMÉTRIQUES.	
	Objets formant les signaux.	Valeur. deg. min.	Côtés opposés des angles.	Longueur de ces côtés.
N	Signal planté.	50° 07'	HI	944,4
H	id.	105 25	NI	1196,0
I	id.	26 28	NH	548,0
A	id.	48 00	KI	1093,4
I	id.	37 56	AK	897,3
K	id.	94 24	AI	1466,8
A	id.	20 14	KL	314,8
K	id.	78 06	AL	886,7
L	id.	81 40	AK	897,3
L	id.	51 41	AG	707,2
A	id.	30 40	LG	459,8
G	id.	97 39	LA	886,7

DISTANCES DES SOMMETS D'ANGLES		OBSERVATIONS.
à la méridienne du point B de la base.	à la perpendiculaire menée à cette méridienne par ce point B.	
»	»	<p>Nous croyons tout-à-fait inutile de porter ici la décomposition en triangles de la plupart des polygones employés pour lever le détail des périmètres des forêts des Voivres, ces polygones sont tracés sur la carte.</p>
»	»	
»	»	
»	»	
»	»	
1051,9 ouest.	676,9 sud.	
»	»	
»	»	
825,7 ouest.	894 sud.	
»	»	
»	»	
570,5 ouest.	378 au sud.	

Tous les angles dont il s'agit ici font partie de la division du cercle en 360 degrés : ils sont tous sphériques, ceux observés ayant été mesurés dans le plan horizontal de chaque station ; mais en raison du peu d'étendue de terrain embrassé dans le réseau, l'on n'a tenu compte d'aucun excès sphérique qui, d'ailleurs, ne pourrait porter que sur des secondes dont nous avons rejeté l'annotation dans nos observations et calculs, comme puérils dans une opération aussi circonscrite.

CHAPITRE III.

39. Déterminer la surface d'un triangle quelconque dont on connaît les trois côtés.

Première Méthode.

Soit le triangle ABC dont les côtés $AC = 50^m$ $BC = 40^m$ et $BA = 20^m$ (suppl. fig. 22).

Si du sommet de l'angle B on abaisse une perpendiculaire BD, il est évident qu'en multipliant BD par $\frac{AC}{2}$ on aura la surface de ce triangle : c'est cette ligne BD qu'il s'agit de calculer.

Le petit segment $AD = AC - DC$ et $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2 AC \times DC$. Dans le petit triangle rectangle BDC, on a $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ et dans le triangle rectangle BDA, $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - 2 AC \times DC$.

En substituant $\overline{BC}^2$ à $\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 AC \times DC$, et en transposant les termes il vient $2 CA \times DC = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$, si l'on divise par $2 CA$ on a $DC = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 CA}$ ou la valeur du

plus grand segment. Or ce segment étant connu, on obtient facilement la valeur de BD dans un triangle rectangle BCD dont on connaît 2 côtés BC et DC.

En calculant d'après les valeurs ci-dessus, on a $DC =$

$$\frac{2500 + 1600 - 400}{400} \text{ ou } DC = 37^m. \text{ Or } \overline{DB^2} \text{ étant } \overline{BC^2} -$$

$\overline{DC^2}$ on a $BD = \sqrt{1600 - 1569} = 15.1986$ et finalement la surface du triangle sera $= 25 \times 15.1986 = \underline{\underline{3^a79^m96}}$.

Ainsi, pour obtenir le plus grand segment DC, il faut faire la somme des carrés des deux plus grands côtés AC et BC, en retrancher le carré du plus petit côté BA, et diviser le reste par le double du plus grand côté. Le produit sera le plus grand segment. Puis, pour avoir la perpendiculaire BD, il faut retrancher le carré du plus grand segment DC, du moyen côté BC, et extraire du reste la racine carrée qui sera la valeur de la perpendiculaire BD.

Deuxième Méthode par l'algèbre.

40. Nous ne croyons pas nécessaire d'entrer ici dans la discussion de ce problème. Nous nous contenterons d'indiquer la formule au moyen de laquelle on arrive à la solution.

Soit abc la valeur des trois côtés d'un triangle ABC (*sup. f. 25*), $a + b + c$ la somme de ces trois côtés représentée par $2p$. ($a + b + c = 2p$). La surface S cherchée sera donnée par la formule $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ dans laquelle la surface du triangle est égale à la racine carrée du produit de la demi-somme des trois côtés multipliée par le produit des différences de cette demi-somme et de chacun des côtés.

Si nous faisons $a = 50$, $b = 40$ et $c = 20$, la somme $2p = 110$, la demi-somme $p = 55$. $p - a = 5$

$$p - b = 15$$

$$p - c = 35$$

$S = \sqrt{55 \times (5 \times 15 \times 35)} = \underline{\underline{3^a79^m96}}$. Surface trouvée par la première méthode.

41. Un des problèmes les plus ordinaires à résoudre en arpentage, consiste à prendre dans une masse de terrain quelconque une portion contenant une surface donnée. Pour réduire ce problème à sa plus simple expression, nous supposons qu'il s'agisse de prendre dans une pointe de bois a (*Suppl.*, fig. 24), dont on peut mesurer l'angle dac , que nous supposerons de $52^{\circ} 10'$, une surface de 3 hectares 00 centiare par une ligne cd perpendiculaire au côté ac .

Nous donnerons d'abord une solution purement géométrique de ce problème. Si l'on suppose que ax ou 100 mètres est le rayon des tables, la tangente xy de l'angle de $52^{\circ} 10'$ sera de 62 mètres 892 c., et la surface du petit triangle axy ferait $\frac{100 \times 62,892}{2} = 31,446$.

Les triangles semblables dca , $yx a$ ont leurs surfaces comme les carrés de leurs dimensions homologues : on a la proportion :

31 ares 446 : 3 hect. 0000 :: ax^2 ou 10000	
: $ca^2 = \log.$ de 3 h. 0000.	4771213
Compl. log. 31,446.	= 5024346
Log. du carré de ca	= 9795559
Dont $\frac{1}{2} = \log.$ de ca	= 4897779

Qui correspond à 509 m. 014

Pour vérifier, il faut calculer cd .

R. : tang. $52^{\circ} 10'$:: {	Log. tang. $52^{\circ} 10'$. . . = 7985964
509,014 : cd . . . = {	+ log. ca . . . = 4897779
Log. de $dc = 194,25$	= 2883743

Ajoutant à ce log. de la hauteur cd , celui de

$$154,5 \text{ ou moitié de la base } ac, \text{ ci.} = \underline{1889285}$$

on a pour log. de la surface du triangle acd qui correspond à 3 h. 00 ares 00, nombre proposé.

42. Ce même problème peut se présenter sous plusieurs

formes, qu'avec un peu de réflexion l'on ramènera au cas précédent.

Dans le cas de la figure 25 (*Suppl.*), où il faut prendre en o ou en p un trapèze d'un certain nombre d'hectares par une ligne cd ou $c'd'$ parallèle à la ligne Aa connue, et l'angle daA étant connu; si l'on prolonge les deux côtés cA et da de la figure jusqu'à leur rencontre en e , soit sur le terrain, soit par le calcul, mais toujours de manière à avoir la longueur Ae , on calculera le triangle aAe que je suppose être $= \overline{a^2}$. Ensuite :

1^o Si l'on doit prendre la surface demandée, que je suppose être $= S^2$ en o , on fera cette proportion :

$$S^2 + a^2 : a^2 :: \overline{ce^2} : \overline{Ae^2}, \text{ d'où } ce = \sqrt{\frac{(S^2 + a^2) \cdot \overline{Ae^2}}{a^2}}$$

$$= Ae \sqrt{\frac{S^2 + a^2}{a^2}} : ce = Ae \sqrt{1 + \frac{S^2}{a^2}}$$

Remarque. Si l'on fait $S^2 = 0$ on trouve $ce = Ae$.

2^o Si la contenance demandée S'^2 doit être prise du côté de p , on retranchera cette surface de celle que l'on vient de calculer, et dont il restera $c'd'e$, et on fera la proportion :

$$a^2 - S'^2 : a^2 :: c'e^2 : Ae^2, \text{ d'où } c'e = \sqrt{\frac{(a^2 - S'^2) Ae^2}{a^2}}$$

$$= Ae \sqrt{\frac{a^2 - S'^2}{a^2}} = Ae \sqrt{1 - \frac{S'^2}{a^2}}$$

Remarque. Si l'on fait $S'^2 = 0$ on a $Ae = c'e$.

Passons maintenant à une solution algébrique.

45. Connaissant la ligne b et la surface a^2 , déterminer la hauteur x du trapèze $= a'$ pour le cas où l'angle a est aigu

(Suppl., fig. 26 A), ou x' pour le cas où l'angle a est obtus (Suppl., fig. 26 B).

Du point a élevez à la ligne b une perpendiculaire ag et ag' de 100 mètres aux points g et g' , menez et mesurez les ordonnées gh et $g'h'$, vous saurez déjà de combien la base opposée d ou d' diminuera par 100 mètres de hauteur de x ou de x' (cette connaissance vous eût été aussi bien donnée par la mesure de l'angle hab , bah').

La proportion :

$$ag : gh :: ak \text{ ou } x : ik$$

fait voir que le rapport de la diminution totale ik de la base d avec la hauteur x sera égal à celui de la partie gh aux 100

mètres mesurés. Nommons $\frac{1}{c}$ ce rapport constant, il est évident que ik , pris positivement ou négativement, sera toujours $= \frac{1}{c} x$, ou $\frac{x}{c}$.

Dans le cas de la fig. A, où la base d diminue, on a l'équation $a^2 = \frac{\left(b + b - \frac{x}{c}\right)}{2} x$ qui, étant résolue à la

manière ordinaire des équations du 2^e degré, devient $x = bc \pm \sqrt{b^2 c^2 - 2ca^2}$

Si $b = 25$ ares, le rapport $\frac{1}{c} = \frac{1}{5}$ et $a^2 = 400$, on aura $x = 125 \pm \sqrt{15625 - 4000} = 125 \pm \sqrt{11625} = 125 \pm 107,81$.

De ces deux valeurs je prends celle $125 - 107,81$, qui est la seule qui convienne, et j'ai pour hauteur x du trapèze 17^m19.