

posés au sommet n'embrassent plus des arcs égaux lorsque ce sommet n'est pas au centre; et en même temps on corrige l'erreur en prenant la moitié de la somme de ces arcs, puisqu'un angle dont le sommet est placé entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de la somme des arcs compris entre ces côtés et entre leurs prolongements. On atténue aussi par ce moyen les erreurs de la division de l'instrument, quand il s'en trouve.

Pour rendre le *pointé* plus sûr, et voir plus distinctement les objets éloignés, on a remplacé les alidades à pinnules par des lunettes, dans l'intérieur desquelles on a placé des fils perpendiculaires entre eux, et dont la rencontre répond au centre de l'ouverture apparente, ou *champ* de la lunette.

Dans la plupart des graphomètres à lunettes, celle de l'alidade mobile est élevée au-dessus du plan de l'instrument, *figure 75*, de manière qu'elle puisse se mouvoir perpendiculairement à ce plan, et par conséquent s'abaisser ou s'élever verticalement quand le demi-cercle est dans une situation bien horizontale. L'angle marqué alors sur l'instrument, est celui que font les plans verticaux passant par le centre du demi-cercle, et par les objets auxquels on vise; et c'est par conséquent, sans aucune réduction, l'angle horizontal tel qu'il doit être tracé sur le plan qu'on lève.

Si la lunette mobile était appliquée sur l'instrument, on ne pourrait mesurer que les angles compris dans le plan passant par les objets observés et par le centre du cercle, plan qui n'est pas presque jamais horizontal, et qui change quand on passe d'un objet à un autre.

A mesure qu'on perfectionnait le *pointé* des instruments, il était nécessaire que leur division fût plus exacte et plus fine, pour qu'elle pût faire apprécier les petites différences d'alignement que rendait sensibles le grossissement des images dans les lunettes: c'est à quoi on a très-bien réussi au moyen d'un arc qu'on appelle *Vernier*, du nom de celui

qui en a inventé l'usage. L'explication de la *figure 76* pourra en donner une idée. AB représente une portion du limbe de l'instrument; *ab* est un arc concentrique faisant partie de l'alidade, répondant à 5 divisions du limbe, mais divisé en 6 parties. Si les divisions du limbe sont des degrés, 5 vaudront 300 minutes; et si l'on en prend le sixième, on aura 50 minutes pour la valeur d'une division de l'alidade.

Si donc le premier point, c'est-à-dire le zéro de la division de l'alidade, répond au trait d'une division du limbe, le trait suivant de la division de l'alidade sera à 10 minutes en arrière du trait suivant de la division du limbe; il s'en faudra du double, c'est-à-dire de 20 minutes, que le troisième trait de la division de l'alidade n'arrive au troisième trait de la division du limbe, et toutes ces différences s'accumuleront pour former la sixième division de l'alidade, et compléter les 5 degrés correspondants du limbe. Il suit de là que si l'alidade avance de 10 minutes, le second trait de sa division coïncidera avec le second trait de la division du limbe; si c'est de 20 minutes, la coïncidence aura lieu au troisième trait, et ainsi de suite de 10 minutes en 10 minutes.

Si le limbe était divisé en demi-degrés et qu'on en eût porté sur l'alidade 14 pour diviser le tout en 15 parties, chacune de ces parties vaudrait 28 minutes, et différant de celles du limbe de 2 minutes seulement, indiquerait les minutes de 2 en 2, par les coïncidences successives avec les traits du limbe. On pourrait même, avec un peu d'attention, estimer les minutes impaires: car lorsque l'arc mesuré se termine à l'une de ces minutes, aucun trait de l'alidade ne coïncide avec ceux du limbe, mais une des divisions de l'alidade se trouve comprise en entier dans une division du limbe.

Pour mieux juger de la position respective des deux divisions, on les regarde avec une loupe; les instruments les plus soignés portent même des microscopes destinés à cet usage.

Quand on est parvenu à rendre appréciables de très-petites parties de la division, il faut que les mouvements de l'instrument et de ses alidades s'effectuent sans secousse et par degrés presque insensibles. On a donc inventé des mécanismes propres à donner des mouvements beaucoup plus lents et plus gradués que ceux qu'on peut imprimer avec la main seule. Les vis, travaillées avec art, en ont fourni le moyen.

Tout ce que nous pouvons en dire ici, c'est qu'ayant fixé sur le limbe une pince portant un écrou dans lequel passe une vis attachée à l'alidade, celle-ci ne se déplace, à chaque tour de la vis, que de la hauteur du pas de cette vis, c'est-à-dire de la distance entre deux révolutions consécutives de son filet, ce qui dépend de sa finesse qu'on sait maintenant porter très-loin. L'appareil est en outre disposé de manière qu'on peut rendre l'alidade libre afin de la placer promptement à la main, dans telle ou telle direction qu'on voudra, la vis ne servant qu'à perfectionner le premier aperçu.

Des graphomètres assez anciens, auxquels on avait déjà appliqué les *vis de rappel* dont nous venons de parler, sont encore fixés par une tige à une boule reçue dans une cavité où elle peut se mouvoir dans tous les sens, et est arrêtée en serrant une vis : c'est ce qu'on appelle un *genou*, à cause de la ressemblance avec cette articulation. Cependant, quelque ingénieux qu'ait pu paraître ce mode de mouvement, il ne saurait être assez doux et assez gradué pour répondre à la *sensibilité* des autres parties de l'instrument. C'est pourquoi on l'a remplacé par des mouvements isolés qui s'exécutent d'abord librement avec la main, qu'on gradue ensuite au moyen de vis engrenées convenablement, et qu'on arrête enfin solidement avec des *vis de pression*.

Pour saisir les rapports de ces mouvements, il faut concevoir l'instrument placé dans une situation horizontale, et porté sur une tige verticale, brisée en deux parties par une

charnière *ab*, figure 77, dont l'axe est horizontal, en sorte que le plan de l'instrument puisse prendre telle inclinaison qu'on voudra, par rapport à l'horizon, puisque la partie inférieure *cd* de la tige, demeurant verticale, tourne sur elle-même, afin qu'on puisse diriger vers tel point de l'horizon qu'on voudra l'axe de la charnière.

Avec ces deux mouvements, on peut toujours mettre le limbe de l'instrument dans le plan déterminé par le point qu'occupe l'œil de l'observateur, et ceux où il se propose de viser, puisque, par le mouvement horizontal, l'axe *ab* de la charnière, autour duquel se fait le mouvement vertical, peut toujours être rendu parallèle à la commune section du plan horizontal et du plan incliné qui contient les deux points à observer : il ne restera plus qu'à faire tourner l'instrument autour de cet axe, pour lui donner l'inclinaison du premier plan.

Mais ce n'est pas tout d'avoir fait coïncider ces deux plans, il faut encore amener tel point du limbe qu'on voudra vers l'un de ceux auxquels on doit viser. C'est ce qui s'effectue en faisant tourner l'instrument sur son centre *O*, autour de la tige qui le porte immédiatement et qui est alors perpendiculaire au plan des objets et de l'œil.

Un dernier perfectionnement ajouté au cercle entier par Borda, d'après une indication de Mayer, c'est la propriété de multiplier les angles observés, en sorte qu'au lieu de ne mesurer que l'angle simple, on puisse trouver marqué sur l'instrument un multiple de cet angle : c'est ce qui lui a fait donner le nom de *cercle répéteur*.

On voit d'abord que ce procédé doit rendre sensible de petites fractions qui échapperaient dans l'angle simple. Si, par exemple, on ne peut lire sur le limbe que la minute, $1\frac{1}{4}$ de minute qu'on n'apercevrait pas dans l'angle simple formant 2 minutes lorsqu'il est répété 8 fois, devient très-appreciable. De plus, quelque soin qu'on apporte à la division

du limbe, il s'y rencontre souvent de petites inégalités; mais comme elles n'ont lieu que dans quelques points, et qu'à chaque répétition de l'angle on tombe sur un nouveau point du limbe, l'erreur peut s'anéantir par quelque compensation ou diminuer beaucoup lorsque, pour conclure de l'arc observé la mesure de l'angle simple, on divise cet arc par le nombre des répétitions qui ont eu lieu.

Voici comment il semble d'abord qu'on pourrait opérer avec une seule alidade qu'on rendrait alternativement mobile et fixe par rapport au limbe, et en empêchant à volonté celui-ci de tourner sur son axe. On mettrait en premier lieu cette alidade sur le zéro de la division; on la fixerait sur le limbe par une vis de pression, et, dans cet état, on la dirigerait sur l'un des côtés AB, *figure 78*, de l'angle BAC, qu'on se propose de mesurer. On arrêterait ensuite le limbe dans cette position, où le premier point *b* de la division correspond au point B; puis on détacherait l'alidade pour la diriger sur le point C. On la fixerait de nouveau sur le limbe que l'on rendrait mobile, et on le tournerait jusqu'à ce que l'alidade fut revenue sur le point B, ce qui, en amenant le point *c* vis-à-vis du point B, jetterait le premier point *b* de la division, sur la gauche, à une distance *bb'* égale à l'arc *bc*. On arrêterait alors le limbe dans cette position, puis on détacherait l'alidade pour la ramener encore sur le point C; il est visible que, dans ce dernier mouvement, elle aurait parcouru, au-delà du point *c*, un arc égal à *bc*, et par conséquent, depuis le point *b*, un arc double de celui qui mesure l'angle BAC. En continuant ainsi de ramener sur le premier côté de l'angle le point du limbe dirigé sur le second, on ajoute à lui-même, autant de fois qu'on veut, l'arc qui mesure cet angle (1).

(1) Si l'on éprouvait quelque difficulté à concevoir cette manœuvre, il faudrait recourir au moyen indiqué dans la note de la page 34.

La sûreté de ce procédé dépend de la parfaite immobilité du limbe quand il est arrêté; car autrement le point de départ de chaque répétition ne correspondrait plus exactement au point B. Pour ôter cette incertitude, et vérifier à la fois les deux alignements, on se sert d'une seconde alidade qu'on peut rendre mobile ou fixer au limbe, à volonté, comme la première, mais placée au-dessous. Voyez la *figure 79*.

Dans cette construction de l'instrument, on amène d'abord sur le point C, *figure 80*, l'alidade supérieure fixée au limbe, sur le zéro de la division, et on dirige sur le point B l'alidade inférieure, qu'on a laissée libre. Cela fait, on fixe cette dernière au limbe, et on l'amène sur le point C, ce qui rejette la première sur la droite, d'une quantité *co'* égale à l'arc *bc*; on détache celle-ci pour la diriger sur le point B, et lorsqu'elle y est arrivée, elle a parcouru le double de l'arc qui mesure l'angle BAC. En prenant pour un nouveau point de départ celui qu'occupe maintenant, sur le limbe, la lunette supérieure, on lui fera parcourir encore le double de l'arc *bc*, ce qui formera le quadruple de cet arc, et on arrivera, par ce moyen, à un multiple pair quelconque de la mesure de l'angle BAC. On aperçoit sans peine que, dans ces mouvements, l'alidade supérieure parcourra plus d'une fois la circonférence, et qu'il faudra tenir compte, comme d'un seul arc, de tout le chemin que cette alidade a fait depuis le premier point de départ. On remarquera aussi que l'alidade ou lunette inférieure est placée à côté du centre, ce qui change un peu l'angle. Il a fallu lui donner cette position pour que le limbe pût se mouvoir librement; mais la correction que cette circonstance exigerait est insensible dès que la distance des points auxquels on vise est un peu grande par rapport au rayon de l'instrument.

N^o 50, PAGE 36.

Quand les angles ont été mesurés avec précision, on ne se sert plus du rapporteur pour les construire sur le papier; cet instrument ne pouvant procurer quelque exactitude que sur de grandes dimensions qui le rendraient fort incommode. On voit sans peine l'effet que produit, sur le prolongement des lignes, une très-petite différence dans l'angle, lorsqu'elle se trouve près du sommet: il est donc à propos non-seulement de marquer cet angle avec le plus grand soin, mais encore d'en déterminer l'ouverture le plus loin qu'il sera possible du sommet.

Pour cela, on a recours aux nombres qui expriment les cordes des arcs, et dont on a dressé des tables pour un rayon qu'on peut supposer à volonté égal à 1 ou à 10, à 100 ou à 1,000, et ainsi de suite. On prend sur une échelle divisée en parties décimales, nommée *échelle de dixmes*, la longueur de ce rayon avec lequel on décrit, du sommet A de l'angle, un arc indéfini DE, *figure 81*, qui marque un point D sur le côté dont la direction est donnée. Cherchant ensuite, dans la table, la corde qui répond à l'arc observé, on la prend sur l'échelle, on la porte sur l'arc DE, à partir du point D, ce qui donne le point E, par lequel tirant AE, l'angle DAE est celui qu'on demande.

Si, par exemple, on avait à construire un angle de 25 degrés 30 minutes, sa corde étant exprimée par 0,44138 quand le rayon est un, le serait par 44, pour un rayon égal à 100, et par 441 pour un rayon égal à 1000 (1).

(1) Il y aurait, je trouve, une grande commodité à écrire toutes les lignes trigonométriques pour un rayon égal à l'unité, parce qu'on passerait facilement de celui-là à tel autre que ce fût. Quand le rayon est 100000, il faut, pour passer au rayon 1, séparer cinq chiffres décimaux sur la droite du nombre marqué dans la table.

Si l'on n'avait pas sous la main une table des cordes comme celle que M. Francœur a publiée, on pourrait la remplacer par celle des sinus naturels, qui faisait autrefois partie de tables trigonométriques, et que maintenant, surtout en France, on a supprimé, fort mal à propos, à ce qu'il me semble. Le sinus d'un arc étant la moitié de la corde de l'arc double, il s'ensuit que *la corde d'un arc quelconque est le double du sinus de sa moitié.*

Dans l'exemple ci-dessus, la moitié de 25 degrés 50 minutes est de 12 degrés 45 minutes, et a pour sinus 0,22069, dont le double 0,44138 est la corde cherchée.

Enfin, si l'on n'a que les logarithmes des sinus, on prendra celui du sinus de 12 degrés 45 minutes, qui est de 9,54580, et on le cherchera dans la table des logarithmes des nombres, comme le logarithme d'une fraction décimale : on trouvera ainsi 0,2207, comme par la table des sinus naturels.

Quand l'angle est obtus, on l'obtient avec plus de précision en construisant son supplément, c'est-à-dire l'angle formé sur le prolongement du côté donné; mais si l'on n'a pas assez de place sur le papier pour prolonger suffisamment ce côté, on peut prendre la corde de la moitié de l'arc donné, et la porter deux fois sur celui qu'on a décrit du sommet comme centre. De cette manière, on n'a besoin des cordes que jusqu'à celle de 90 degrés.

On voit aisément que, par le moyen des cordes, on peut déterminer aussi la mesure d'un angle déjà tracé sur le papier; car ayant décrit l'arc DE avec le rayon qu'on a choisi, on portera sur l'échelle la distance DE, pour en obtenir la valeur, et on trouvera, dans la table des cordes, à quel arc elle correspond.

Mais, pour apporter dans la construction des plans le plus haut degré de précision, il faut, par les formules de la trigonométrie rectiligne, calculer immédiatement la longueur

des côtés des triangles formés sur le terrain. On pourra mettre dans cette opération autant d'exactitude que le comportent les observations, et on décrira les triangles par leurs côtés mesurés sur l'échelle (n° 41). Tout se réduit alors à se procurer une échelle bien divisée, et un bon *compas à verge*, quand les longueurs à prendre sont trop grandes pour le compas ordinaire.

C'est ici le lieu de prévenir le lecteur qui ne serait pas exercé à la construction des figures de géométrie, qu'il faut éviter dans les opérations sur le papier, et par conséquent sur le terrain, d'employer des lignes qui se rencontreraient sous des angles trop petits ou trop grands. Celles que l'on trace sur le papier ayant toujours une certaine largeur, leur intersection est, dans le fait, une petite surface, mais d'autant moindre que le trait est plus fin. On l'a exagéré dans la *figure 82*, afin de rendre la chose plus sensible. On y voit que l'intersection A, où les lignes se coupent presque à angle droit, est plus resserrée et plus précise que l'intersection B des lignes qui se rencontrent très-obliquement. Ajoutez à cela que, dans ce dernier cas, une légère erreur commise dans le tracé ou dans la mesure de l'angle en occasionnerait une grande sur le point de rencontre cherché.

N° 51, PAGE 37.

La propriété qui fait préférer la boussole aux autres instruments, pour la levée rapide des plans, c'est de dispenser de prendre deux alignements à chaque angle, en sorte qu'on n'a jamais à viser qu'au seul point qu'on veut déterminer, ce qui ne demande pas un établissement aussi long et aussi stable que celui qu'exigent les autres instruments; mais à côté de cet avantage se trouvent bien des défauts. L'aiguille peut être arrêtée par le frottement sur son pivot, dérangée par la présence du fer, et donne bien peu de précision dans la mesure de l'angle; enfin, il faut quelque temps pour placer l'instrument sur son pied, et pour attendre que les oscillations de l'aiguille aient cessé. Il existe un instrument, inventé pour l'usage des marins, qui est exempt de tous les inconvénients particuliers à la boussole, qui est susceptible d'une précision beaucoup plus grande, qui, par-dessus tout cela, n'a pas besoin d'être posé sur un pied, et dont on peut par conséquent se servir à cheval. Il est encore peu connu des arpenteurs et des militaires, auxquels il serait néanmoins bien utile dans les reconnaissances.

L'instrument dont je veux parler, est le *sextant de réflexion*. La figure 85 le représente sous la forme qui convient au genre d'opération que j'ai en vue dans cette note. L'alidade MI porte au centre M un miroir bien perpendiculaire au plan de l'instrument, et qui, lorsqu'elle est sur le premier point H de la division, devient parallèle à un autre miroir immobile N, placé sur le côté MG. Ce dernier miroir a une partie non étamée, au travers de laquelle on regarde, par une pinnule ou une lunette placée en O sur l'autre côté MH de l'instrument, un objet B. On fait ensuite tourner l'alidade MI, jusqu'à ce que l'on aperçoive au bord de la partie

étamée du miroir N l'image du point C, en contact avec le point B; et on lit sur l'arc IH la mesure de l'angle compris entre les objets B et C, au point où est l'observateur.

A proprement parler, l'arc IH n'est égal qu'à la moitié de celui qui mesure l'angle cherché; mais l'arc total GH, qui est de 60 degrés, est divisé en 120 degrés, et donne ainsi le double de la mesure de tous les arcs qu'il comprend.

Comme cette propriété est le plus souvent énoncée sans démonstration, je vais en donner une qui paraît complète et assez simple.

Soient B et C, *fig. 81*, les points observés : que l'œil placé en O aperçoive au point N l'image de l'objet C, renvoyée par le grand miroir M sur le petit miroir N; enfin, que l'on prolonge les rayons BN et CM jusqu'à leur rencontre en A; Il faut, en conséquence de la loi de la réflexion, que l'angle OND, qui est l'angle de réflexion sur le petit miroir N, soit égal à l'angle d'incidence, formé par la ligne MN et le prolongement de ND. Il suit de là que si l'on mène NF perpendiculaire au petit miroir N, les angles ANF et MNF, compléments des précédents, sont encore égaux. Par la même raison, les angles CME et EMN formés, le premier par le rayon incident parti du point C et la perpendiculaire EM au grand miroir M, le second par cette perpendiculaire et le rayon réfléchi MN, sont encore des angles égaux, donc l'angle CMN est double de EMN, comme MNA est double de MNF.

Cela posé, EMN étant la moitié de l'angle CMN extérieur au triangle AMN, est égal à la moitié de la somme des angles MAN, et MNA qui sont les intérieurs opposés. Ce même angle EMN étant extérieur aussi au triangle MNF, est égal à la somme des angles MFN et MNF, qui sont les intérieurs opposés. Ces deux sommes sont par conséquent égales entre elles; mais la moitié de l'angle MNA, comprise dans la pre-

mière, n'est autre chose que l'angle MNF compris dans la seconde ; en retranchant ces parties communes, on aura la moitié de MAN égale à MFN. Or MF et NF étant respectivement perpendiculaires aux lignes MD et ND, l'angle MFN est égal à NDM, et par conséquent à son alterne interne DMH : donc, enfin, ce dernier n'est que la moitié de MAN.

L'angle MAN n'est pas précisément celui qu'il faut mesurer ; c'est l'angle BMC formé au centre de l'instrument, par les lignes menées des points B et C ; mais cet angle BMC étant extérieur au triangle BMA, est égal à la somme des intérieurs opposés MAN et MBN, dont le dernier devient d'autant plus petit que le point B est plus éloigné, parce que la ligne MN n'a, au plus, que quelques pouces : il peut donc être négligé dès que la distance BN est considérable, ce qui ne saurait être indiqué dans la figure.

L'alidade MI, *fig.* 85, porte un vernier dont on se sert quand on veut avoir une mesure précise de l'angle ; autrement on se borne à la lire sur la division du limbe. Pour obtenir encore plus de célérité dans l'opération à faire sur le terrain, on a trouvé un moyen fort simple de se dispenser de la lecture de l'angle, au moment où on le prend. Les extrémités H et I du côté MH et de l'alidade MI, étant armées de pointes de compas, il suffit d'avoir une bande de carton, dans laquelle on pique ces pointes pour marquer l'écartement du côté MH et de l'alidade MI, au moyen duquel on remet, quand on veut, ces deux parties dans la même situation respective. On peut donc renvoyer à un temps et à un lieu plus commodes la lecture des angles. On sent combien cela peut être avantageux pour les opérations militaires, où la promptitude est la condition la plus importante.

L'exactitude dont cet instrument est susceptible peut d'ailleurs être poussée très-loin. Avec un rayon de 81 millimètres (3 pouces) et un vernier, il peut donner l'angle, à moins d'une minute près. Combien la boussole est loin de

cela, puisqu'à peine, sous les mêmes dimensions, peut-elle faire apprécier 30 minutes !

Les artistes anglais en ont encore construit de beaucoup plus petits, qu'ils ont nommés *sextants en tabatière*, et qui donnent l'angle jusqu'à la minute. (*Voyez la Bibliothèque britannique*, tome XVI, *Sciences et Arts*, p. 133, 144, et tome XIX, p. 77.)

Sans doute que cette exactitude est superflue pour les opérations de détail : mais il est toujours bien aisé de la négliger quand on n'en a pas besoin, ce qui abrège d'autant l'opération. Le grand avantage de cet instrument sur tous les autres, et qui le recommande particulièrement, c'est de pouvoir être tenu à la main. Employé avec la mesure des distances, soit au pas, soit par le temps (page 72), le sextant de réflexion rendrait les plus grands services pour lever les plans rapidement et presque à vue.

En suivant un chemin pour déterminer la position des objets situés de part et d'autre, il suffirait, comme le montre la *figure 83*, de mesurer, à chaque changement de direction, l'angle que fait celle qu'on quitte avec celle qu'on prend, d'évaluer les intervalles parcourus dans chacune, et d'observer de deux points du chemin, suffisamment éloignés les angles que les objets placés des deux côtés font avec sa direction.

Depuis qu'on a remarqué l'utilité des instrument à réflexion pour la levée des plans, on a cherché à les simplifier ; M. Allent a donné l'idée d'une équerre de réflexion (*voyez le Mémoire topographique et militaire, publié par le Dépôt de la guerre*, 1^{re} édit., n^o 4, p. 74) ; d'autres officiers du génie ont aussi proposé des instruments propres à mesurer les angles quelconques par une seule réflexion ; mais les instruments à double réflexion ont encore paru préférables, et il est bon d'observer qu'en plaçant sur 90° l'alidade du sextant, il peut remplacer l'équerre. Nous ne saurions nous

arrêter davantage sur le détail des instruments en usage dans la levée des plans ; mais on le trouvera dans le *Cours complet de Topographie et de Géodésie*, publié par M. Benoît.

Je terminerai cette note en faisant remarquer que le sextant doit son nom à ce que l'arc total qu'il embrasse est la sixième partie de la circonférence du cercle.

N° 53, PAGE 38.

Si l'instrument dont on se sert a des lunettes *plongeantes*, c'est-à-dire pouvant s'élever ou s'abaisser perpendiculairement à son plan, en le mettant dans une situation horizontale, il donnera l'angle réduit à l'horizon, tel qu'il doit être employé dans la construction du plan. Mais quand les lunettes ne peuvent se mouvoir que dans le plan de l'instrument, elles ne donnent que des angles dont les côtés sont inclinés à l'horizon, lorsque les objets ne sont pas au même niveau, et elles ne font pas connaître l'angle qui serait compris entre les *projections horizontales* de ces côtés.

Pour obtenir ce dernier, il faut joindre à la mesure de l'angle formé par les rayons visuels menés de l'œil aux objets, celle de l'angle compris entre chacun de ces rayons et la verticale menée par l'œil de l'observateur.

En effet, si l'on suppose que les trois points A, B, C, *fig.* 86, descendent verticalement sur un plan horizontal en D, E, F, l'angle EDF qu'il faut obtenir, est celui que forment les plans verticaux menés par les droites AD et AB, AD et AC, le même que celui que forment deux droites *ab* et *ac* menées dans ces plans par un point quelconque *a* de la commune section AD, perpendiculairement à cette commune section. Or, quand on connaît les angles *bAa*, *cAa*, ayant pris arbitrairement *Aa*, on peut construire séparément les triangles *bAa*, *cAa*, rectangles en *a*, ce qui donne les lignes *Ab* et *Ac*. Ayant alors deux côtés du triangle *bAc* et l'angle qu'ils comprennent, on en déterminera le troisième côté *bc* qui est aussi le troisième côté du triangle *bac* : on pourra donc construire ce dernier, et trouver ainsi l'angle *bac* égal à l'angle cherché EDF.

Cette construction s'abrège beaucoup quand on a des ta-

bles contenant les tangentes et les sécantes naturelles; car, en prenant la distance Aa égale au rayon de ces tables, ab et ac sont les tangentes, Ab et Ac les sécantes des angles bAa , cAa , et se trouvent tout de suite dans les tables: on n'a plus à chercher que le côté ba .

Je n'ai voulu qu'indiquer ici comment l'angle réduit à l'horizon dépend de l'inclinaison des rayons visuels. On trouvera, dans mon *Traité élémentaire de Trigonométrie*, la manière de calculer le premier de ces angles, par un triangle sphérique. On a encore des moyens d'abrégier l'opération, lorsque l'inclinaison des rayons visuels est assez petite, ce qui a lieu le plus souvent dans la pratique, principalement quand on vise à des points très-éloignés.

Il reste maintenant à donner une idée de la manière dont on mesure l'inclinaison des lignes, par rapport à l'horizon ou à la verticale. Il est évident qu'il faut d'abord mettre le limbe de l'instrument dans un plan vertical, passant par l'objet auquel on veut viser. Supposons que cet instrument soit un graphomètre à pinnules; si l'on attache un fil à plomb à la pinnule supérieure e , fig. 87, de l'alidade fixe, et qu'il batte exactement sur le point correspondant de la pinnule inférieure d , en ne faisant que raser son bord, c'est-à-dire sans paraître briser ou former un angle, l'alidade fixe sera verticale, et par conséquent aussi le plan de l'instrument, si toutefois les pinnules e et d sont bien d'égale hauteur, et perpendiculaire au plan du graphomètre.

Cela posé, en dirigeant l'alidade mobile sur le point B, l'angle DAB, mesuré par l'arc be , donnera l'inclinaison du rayon visuel AB, par rapport à la verticale AD: et comme cette verticale, étant prolongée, passe par le point du ciel qui répond perpendiculairement au dessus du centre de l'instrument et qu'on appelle *zénith*, l'angle BAZ, supplément de BAD, se nomme *distance au zénith*, et sert aussi à indiquer la position de la ligne AB, par rapport à la verticale.

Si l'on prend les angles à partir du rayon Ah , perpendiculaire au rayon Ae , et par conséquent horizontal, l'angle BAH , mesuré par l'arc bh , complément de be , donnera la situation de la ligne AB , par rapport à l'horizon. Dans la figure, le point B étant moins élevé que le point A , BAH indique l'*abaissement* ou la *dépression* du point B au-dessous de l'horizon. Pour un point C plus élevé que le point A , l'angle CAH indiquera la *hauteur* au-dessus de l'horizon.

Au lieu de rendre vertical le diamètre de , on le place dans une situation horizontale, comme le montre la *figure 88*, au moyen d'un fil à plomb attaché sur la face opposée à la graduation de l'instrument, et qui doit battre sur une ligne tracée d'avance, perpendiculairement au diamètre de .

Les niveaux à bulle d'air, dont nous exposerons bientôt la construction, indiquant avec précision la situation horizontale, il suffirait d'en appliquer un sur le diamètre de , pour parvenir à rendre ce diamètre parallèle à l'horizon, et l'on pourrait alors se passer du fil à plomb; les instruments exécutés avec soin ont d'ailleurs, dans leur construction, des moyens convenables pour les faire servir à la mesure des angles verticaux. Voici en abrégé ce qu'il faut faire avec le cercle répétiteur.

Quand on a rendu son plan vertical, en appliquant sur une de ses faces un fil à plomb, il faut amener sur le zéro de la division, et attacher au limbe la lunette appelée ci-dessus (page 81) *lunette supérieure*, Ab , *fig. 89*, puis la diriger vers le point B auquel on veut viser. Supposons, pour fixer les idées, que la face graduée du limbe soit à la droite de l'observateur, la *lunette inférieure*, qui se trouve maintenant sur la face à gauche, porte un niveau à bulle d'air pour la placer dans une situation horizontale : cela fait, on la fixera à l'instrument qu'ensuite on fera tourner de manière que la face qui était à droite se trouve à gauche, *fig. 90*. On vérifiera si la lunette portant le niveau est restée

horizontale dans ce mouvement ; si elle ne l'est pas, on la fera marcher à cet effet avec l'instrument. Enfin, la lunette supérieure *Ab*, qui est alors dirigée derrière l'observateur, sera détachée de l'instrument et ramenée sur l'objet *B*, ce qui lui aura fait parcourir un arc *bb'* double de celui qui mesure la distance de l'objet au zénith. En répétant cette manœuvre, on obtiendra le quadruple, et ainsi de suite.

On abrège et on facilite beaucoup l'opération quand on est deux : l'un dirige la lunette supérieure, l'autre examine le niveau, et rectifie, s'il y a lieu, la position de la lunette inférieure.

Lorsqu'on veut apporter beaucoup de soin à la détermination des angles, on ne se borne pas à en mesurer deux dans chaque triangle : on mesure aussi le troisième, et l'on vérifie si *la somme de trois valeurs obtenues fait exactement la demi-circonférence*, 180 degrés ou 200 grades. On n'obtient presque jamais cette précision ; mais on en approche d'autant plus que l'instrument est meilleur et l'observateur plus habile.

Le même procédé s'applique aux polygones, pourvu qu'ils soient tout entiers dans un même plan. On sait, par leurs divisions en triangles, que *la somme des angles intérieurs doit faire autant de fois la demi-circonférence qu'ils ont de côtés moins deux*, et l'on cherche si la réunion des valeurs observées compose cette somme.

Si la différence entre le nombre déduit de la nature du polygone et celui qu'on a conclu des mesures prises sur le terrain, ne surpasse pas la limite de l'erreur dont ce genre d'observation est susceptible, avec les instruments dont on s'est servi, on est assuré de n'avoir commis aucune faute grave, et on répartit l'erreur totale entre les divers angles de la figure.

Lorsqu'il s'agit de figures appliquées à la surface terrestre, et que sa courbure est sensible entre leurs contours, on ne

trouve point les sommes indiquées ci-dessus. Lors même qu'il ne s'agit que du triangle, les trois angles, réduits chacun au plan horizontal, donnent une somme qui surpasse toujours la demi-circonférence, parce qu'ils n'appartiennent plus à un triangle rectiligne, mais au triangle sphérique *abc*, fig. 91, formé par les grands cercles dans lesquels les plans menés par les côtés du triangle rectiligne ABC, et par le centre O de la sphère, rencontrent sa surface. Cela résulte de ce que chacun des angles A, B, C, réduit à l'horizon, ainsi qu'on l'a indiqué ci-dessus (page 90), devient celui que forment entre eux les plans verticaux passant par les côtés du triangle rectiligne. L'angle A, par exemple, est remplacé par l'angle *b' a c'* compris entre les tangentes *ab'* et *ac'* des arcs *ab* et *ac*. On peut d'ailleurs, par la trigonométrie sphérique et la connaissance très-approchée qu'on a de la valeur des côtés *ab*, *ac*, *bc*, calculer la sommes des angles du triangle *abc*.

Dans une triangulation un peu étendue, on n'est pas toujours le maître de prendre, pour sommets des triangles, des points accessibles de toutes parts, auxquels on puisse à volonté soit planter des piquets verticaux, soit placer le centre de l'instrument. La nécessité de s'élever pour étendre sa vue au-delà des obstacles que présentent souvent les ondulations du terrain ou les constructions dont il est chargé, font prendre pour signaux les sommets des édifices élevés, comme les tours, les clochers, où il est rarement possible d'établir l'instrument au point sur lequel on a d'abord visé. Il faut alors déterminer avec beaucoup de soin la position du centre de l'instrument, par rapport à la projection du point qui a servi de signal dans ce lieu, de manière qu'on puisse ensuite conclure du calcul quel est l'angle qu'on aurait obtenu si on l'eût observé sur le signal même. C'est là ce qu'on appelle la *réduction de l'angle au centre de la station*.

Si, par exemple, le signal était la pointe du toit d'une

tour circulaire, on se placerait dans un point O , *fig. 92*, duquel on pût apercevoir les signaux A et B marquant les deux autres sommets du triangle. Si l'on ne pouvait pénétrer dans la tour, sur la direction du point O au point C , projection de son centre, on mènerait par le premier deux droites OM , ON , tangentes à la circonférence de cette tour; prenant ensuite les distances Om et On égales, le milieu p de la droite mn donnerait l'alignement OC . Il est d'ailleurs aisé d'obtenir de plusieurs manières la demi-épaisseur de la tour, pour connaître la grandeur de OC , on mesurerait ensuite les angles AOB , COB ; et comme les distances au centre des stations sont toujours très-petites par rapport à celles des stations mêmes, on peut, en négligeant les unes, calculer les autres avec un degré d'approximation suffisant pour les employer à la place des véritables, dans l'évaluation de la différence des angles ACB et AOB . Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans le détail des procédés, qu'il faut varier d'après les circonstances locales: il suffit de faire observer que, connaissant BC , OC et l'angle COB , dans le triangle BOC , connaissant aussi AC , OC et l'angle COA , dans le triangle AOC , on peut calculer OCB du premier, l'angle OCA du second, pour en conclure l'angle cherché ACB , qui est la différence des deux précédents.