

Description de l'instrument.

Ce niveau est construit d'après les principes : 1^o que l'œil A (*fig. 61*) voit son image A' réfléchie dans un miroir vertical B, à une aussi grande distance derrière ce miroir qu'il en est éloigné lui-même par devant ; 2^o que la ligne AA', qui joint le centre de l'œil et le centre de l'image, est horizontale.

L'instrument consiste en un petit pendule C portant un miroir B qui se tient vertical en tournant autour de l'axe horizontal D, formé d'un simple ruban. Un chapeau E s'adaptant au tube F, recouvre le niveau et l'abrite du vent ; ce tube offre une portière KK par laquelle on regarde le miroir ; elle se ferme en tournant un second tube G. Un bouchon H ferme le tube F par en bas.

Pour niveler on retire le bouchon H, on ouvre la portière KK, et, en regardant dans le miroir, on amène l'image de la prunelle, sur son bord, de manière à la mettre en coïncidence avec l'objet vers lequel on mire.

Pour les nivellements rigoureux, on opère en posant l'instrument sur un pied. Les résultats ainsi obtenus ont été comparés, pour l'exactitude, entre ceux donnés par un niveau à bulle d'air et ceux donnés par le niveau d'eau. (Expériences faites à Lyon, par ordre de M. le lieutenant-général Rohault de Fleury.)

Pour les nivellements approximatifs, il suffit de tenir le tube à la main.

Rectification de l'instrument.

Le miroir B à faces parallèles est étamé moitié sur une face, moitié sur l'autre. Il résulte de cette disposition que l'instrument est à retournement, et que, s'il est bien réglé, l'on doit obtenir le même pointé, en visant avec l'une ou

l'autre des faces du miroir; cette disposition rend très-facile la rectification de l'instrument, et permet de vérifier à chaque instant s'il est bien réglé.

S'il ne l'était pas, on le rectifierait en tournant, en avant ou en arrière, la vis L, qui appuie sur la monture du miroir et en change l'inclinaison.

Mesure et tracé des pentes.

Pour rendre cet instrument susceptible de mesurer et surtout de tracer des pentes, l'on introduit la tige J munie de son poids I dans le trou M du pendule C; celui-ci se tient alors dans une position inclinée, et l'on est obligé, pour observer et laisser libres les oscillations, de tenir aussi incliné le tube F qui contient tout l'appareil. Si donc il est sur un pied, il faut que ce pied soit muni d'un genou qui s'adapte au tube F, ou au bouchon H.

Pour tracer ou mesurer des pentes avec l'instrument, il suffit de diviser la tige J en parties égales convenablement espacées. Elles correspondent aux tangentes des pentes données par la ligne de visé. Quand on est arrivé, en tirant la tige, jusqu'à la pente 56 p. 0/0, par exemple, l'on obtient les autres pentes jusqu'à 70 p. 0/0 en tirant le cylindre plein I, qui rentre dans le tube J jusqu'à la marque qu'il porte, en se servant alors du second numérotage du tube J. Les divisions se lient à l'extrémité du tube M' qu'on adapte à volonté au pendule. Il faut avoir soin de le visser du côté de la vis L dans le tube M' du même côté. Les pentes montantes s'observent donc toujours sur la face du miroir correspondant à la vis L, les pentes descendantes sur la face opposée; de façon que lorsqu'on a observé une pente montante, si l'on veut en observer une descendante, il faut dévisser M', amener la face opposée du miroir sur le devant, et revisser M' par le côté où se trouve la vis L.

Le niveau complet coûte 36 francs ; à l'état de niveau simple, il en coûte 18. C'est ainsi qu'il convient mieux de l'acheter.

BOUSSOLE.

Boussole de reconnaissance.

63. Tout voyageur qui explore un pays, tout militaire qui conduit un détachement, doit être muni d'une boussole portative pour s'orienter quand il ne voit pas le soleil ou les étoiles ; pour qu'elle soit complète, il faut qu'il puisse non-seulement s'en servir à la main, mais encore la placer sur un pied pour observer des angles horizontaux. Elle doit aussi, à l'occasion, se placer sur une petite planchette pour l'orienter, au moyen de petites coches qu'on aligne sur les carreaux du plan.

La boussole que nous présentons paraît satisfaire à toutes ces conditions ; elle a la forme d'une montre, ce qui est généralement adopté pour cette sorte d'instrument ; elle contient le petit pendule, déjà en usage pour observer les angles verticaux.

Voici en quoi consistent les additions qu'en y a faites :

1^o Une petite partie plate a été fixée sur le côté ; elle sert à mirer pour prendre des angles horizontaux ou verticaux. Pour ces derniers, elle présente surtout de l'avantage quand l'observateur veut prendre des pentes qui n'aboutissent pas à son oeil, comme le serait la silhouette d'une montagne éloignée.

2^o Le dessous de la boussole a été percé d'un trou à vis, destiné à la fixer à une planchette au moyen d'une vis, ou sur un pied au moyen d'un genou.

3^o Un petit miroir, étamé moitié sur une face, moitié sur l'autre, et mobile autour d'une charnière, est adapté au-dessus de la queue de la boussole. Ce petit miroir peut ser-

vir d'alidade à réflexion quand la boussole est sur un pied, et même quand on opère à la main.

La boussole étant sur un pied, on mire les angles plongeants par la partie supérieure du miroir, les angles descendants, par la partie inférieure.

Quand on n'a pas de pied, il faut poser par terre, dans la direction qu'on veut prendre, une règle de 20 à 30 centim. poser contre la partie plate du côté de la boussole et lire l'angle.

Ce moyen, tout grossier qu'il paraît, est très-supérieur à tout ce qu'on a imaginé pour observer en tenant la boussole à la main.

Le miroir A étant étamé sur deux faces, comme ceux du niveau Burel, transforme au besoin la boussole en niveau. Pour cela, il suffit d'adapter à la queue de la boussole une petite vis, contre laquelle le miroir appuie, et qui sert à régler la verticalité du miroir quand on suspend la boussole par un cordon. Ce même cordon traversant sur la partie opposée de la boussole, permet de la suspendre à une ficelle tendue, et de la faire servir ainsi à prendre des directions dans les mines. Cette boussole coûte 35 francs.

LUNETTE.

Lunette de reconnaissance avec support et micromètre pour la détermination des distances.

66. Après s'être procuré un niveau et une boussole, il reste à avoir un troisième instrument non moins utile : c'est une lunette, non-seulement pour distinguer les objets de loin, mais encore pour faire des déterminations de distances, en ajoutant un micromètre à son foyer. Pour la rendre portative et claire, on fait mieux de se contenter d'une lunette qui retourne les objets ; cela n'a aucun inconvénient

pour les personnes habituées à se servir des lunettes d'instruments, et devient bientôt facile pour les autres. Un petit micromètre gravé sur gélatine, où le millimètre est divisé en 8 ou 10, suffit pour faire avec assez de précision des déterminations de distances au moyen de la formule X

$$= \frac{H}{h} \varphi \times 100, \text{ dans laquelle } X \text{ est la distance d'un ob-}$$

jet à l'objectif ; H la grandeur de l'objet ; h le nombre des divisions qu'il intercepte sur le micromètre φ un coefficient constant, déterminé par une expérience dans laquelle on connaît X, H et h. C'est la distance focale de l'objectif,

mesurée en partie du micromètre. La formule $X = \frac{H}{h} \varphi$

$\times 100$ est inscrite dans le couvercle des lunettes avec la valeur de φ qui varie de 11 à 12. Les officiers qui ont souvent à déterminer la distance à laquelle ils se trouvent d'un homme ou d'un cavalier, feront bien d'inscrire à côté une petite table du nombre de divisions du micromètre interceptées par l'homme et le cavalier, à 200, 400, 600, 800, 1,000 mètres, etc.

On trouve aussi dans le couvercle des lunettes une autre formule $X = \frac{ac \ h'}{h' - h}$ relative au cas où H étant inconnu,

on fait deux observations successives, h et h', à une distance ac de l'objet. Les divisions du micromètre sont réunies de cinq en cinq, par une petite barre pour en rendre la lecture plus facile.

Pour bien faire une observation avec une lunette, il faut pouvoir la fixer. L'on y parvient facilement au moyen d'une vrille, qui est reliée à la lunette par un mouvement de charnière comme celui des têtes de compas.

La vrille se fixe à un pied, à un arbre, etc., et la lunette peut être dirigée sur le point qu'on veut. On trouve chez

M. Gravel, rue Cassette, 14, au prix de 35 fr., des lunettes qui répondent à toutes ces conditions, et qui sont exactement de la grandeur du niveau Burel; on peut d'ailleurs adapter la vrille et le microscope à une lunette ordinaire qui redresse les objets.

L'idée d'adapter un support et un micromètre aux lunettes de poche n'est pas nouvelle. Dès 1808, M. Burel, avec cet esprit ingénieux qu'on lui connaît, avait adapté un micromètre à sa lunette d'armée, et faisait avec elle des déterminations de distance en mirant sur des hommes. Son micromètre consistait en une épingle filetée; le pas de vis de l'épingle lui servait de divisions; c'était un micromètre improvisé. Son support de lunette était son mouchoir ou une corde, avec quoi il l'assujettissait à son sabre ou un jalon.

Dans ces derniers temps, pour des levers aussi précis que ceux faits avec la chaîne, M. de la Vatoublère se servait d'une forte lunette, et de micromètres où le millimètre était divisé en 50 parties. C'était la stadia, recommandée par le *Mémorial du dépôt de la Guerre*, qu'il transportait dans sa lunette, en visant sur le mire de grandeur constante.

Enfin, on trouve en Allemagne, comme objet de quincaillerie, des supports de lunette qui ont quelque rapport avec celui que nous indiquons ici. Tout cela doit faire voir l'utilité des supports et des micromètres de lunettes.

§ XIII. ABORNEMENTS.

67. A la suite de ce Manuel d'arpentage, on a donné un traité de bornage et la formule à suivre pour dresser des procès-verbaux d'abornement. *Voyez* ci-après, Livre III.

Habituellement on indique dans ces actes les distances entre chaque borne, et les angles déterminés sur chacune d'elles par les lignes droites dont elles doivent marquer les extrémités.

A l'aide de ces documents, on peut retrouver la position des bornes déplacées ou enlevées, mais l'opération exige nécessairement beaucoup de soins et l'emploi d'instruments destinés à la mesure des angles, et que l'on n'a pas toujours à sa disposition.

Dans la pratique, pour mettre un propriétaire à même de rechercher plus facilement les limites de son terrain, et de faire seul l'application de ses actes de propriété, nous complétons nos procès-verbaux en repérant les bornes à des lignes d'abscisses et d'ordonnées que l'on peut facilement rétablir avec une chaîne et une équerre d'arpenteur.

Nous allons en donner un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de délimiter deux propriétés contiguës, et de placer à cet effet des bornes suivant la ligne brisée AE (suppl. 59), et qu'après vérification des contenances la limite soit définitivement indiquée et acceptée, on réglerait alors l'abornement de la manière suivante (pour le n° 1) Pour conserver à chaque parcelle la contenance déterminée par acte du..... leur limite commune sera fixée par la ligne brisée ABCDE, suivant laquelle on placera pour marquer chacun des alignements partiels, savoir :

Une première borne au point A, à huit mètres de l'angle K d'un terrain appartenant à..... (N° 3) et à quinze mètres de la borne H séparative de la propriété de..... contre les terrains appartenant à..... (N° 4).

Une deuxième borne au point B, à vingt-cinq mètres soixante-dix centimètres de distance de la première, au sommet d'un angle rentrant de $175^{\circ} 45'$ sur la propriété N° 2 : la ligne AB formera avec celle AH un angle de $98^{\circ} 22'$.

Une troisième borne au point C, à 41 m. 20 cent. de la deuxième et au sommet d'un angle rentrant de $175^{\circ} 24'$ sur la propriété n° 2.

Une quatrième borne au point D, à 28 mètres de la troi-

sième, au sommet d'un angle rentrant de $176^{\circ} 59'$ sur la même propriété.

Enfin, au point E une cinquième borne, à 52 m. 70 cent. de la quatrième et à 22 m. 40 cent. de la borne F située sur le périmètre de la propriété (N^o 2) contre un terrain appartenant à..... (N^o 5).

Les alignements seront établis en lignes droites de borne en borne; et ces bornes seront repérées par abscisses et ordonnées, sur une ligne droite partant du point A, à 15 mètres de la borne H, formant, avec la ligne A, H, un angle de $87^{\circ} 53'$, se terminant en L à 30 m. 90 cent. de la borne F. à 155 m. 20 cent. du point A : le prolongement de cette ligne rencontre, à 272 mètres du point A, l'angle G d'un terrain appartenant à.... (N^o 6).

Les abscisses seront savoir :

De la 1 ^{re} à la 2 ^e borne, de.	25.6
De la 2 ^e à la 3 ^e borne, de.	41. ⁿ
De la 3 ^e à la 4 ^e borne, de.	28. ⁿ
De la 4 ^e à la 5 ^e borne, de.	52.6
De la 5 ^e au périmètre FL.	6. ⁿ

Longueur totale de la ligne AL. 155.2

Les ordonnées seront :

Au point A (1 ^{re} borne).	zéro.
Au point B (2 ^e borne).	4.6
Au point C (3 ^e borne).	9. ⁿ
Au point D (4 ^e borne).	8.8
Au point E (5 ^e borne).	6. ⁿ
Au point L (périmètre).	<u>zéro.</u>

Pour repérer la ligne des abscisses, on choisit des points remarquables, des bornes, des angles de clôture ou de construction autant que possible. Elle peut être, soit une ligne d'opération, soit une ligne conventionnelle.

Si l'on voulait par exemple rattacher les points BC, DE, à une ligne AX inclinée de 50° sur AB (*Suppl. fig. 60*), on pourrait déterminer trigonométriquement les abscisses et les ordonnées, ou plus promptement en faisant usage du limbo-mètre. Ainsi, l'angle BAX (*fig. 60*) donne $= 50^{\circ}$.

L'hypothénuse AB = 25.7

L'abscisse. 22.2

Et l'ordonnée. 12.8

L'angle CBA = $175^{\circ}45'$

L'angle formé par le prolongement de AB

et BC, CBB' = $180^{\circ} - 175^{\circ}45' = .$ $4^{\circ}15'$

BX' étant menée parallèlement à AX

l'angle CBX' = $50^{\circ} - 4^{\circ}15'$ soit. . $25^{\circ}45'$

L'hypothénuse BC étant de. 41.2

L'abscisse sera. 37.4

L'ordonnée partielle sera. 17.9

Et l'ordonnée totale. 30.7

L'application d'un procès-verbal d'abornement offrant ces indications, se fait, on le comprend sans difficultés et sans qu'une erreur partielle puisse avoir d'influence sur une limite entière, si l'on a soin de mesurer par sommes de distances et non par détails à partir de l'origine de la ligne choisie pour la base de l'opération. (N^o 12, p. 151).

Si l'on ne connaissait que les angles et les distances entre chaque borne, une erreur à un point quelconque causerait inévitablement un écartement de tout le surplus de la limite; et les erreurs sont d'autant plus à craindre que la moindre déviation dans une borne entraîne le déplacement du sommet de l'angle et des côtés qui le déterminent, surtout lorsque les bornes sont à de grandes distances les unes des autres, sur un sol accidenté, ou dans lequel on ne peut les fixer invariablement. Les bornes placées dans les terrains cultivés

sur le bord des ruisseaux, ou sur les talus des fossés, sont très-souvent renversées ou inclinées, et si l'on avait à rétablir un périmètre assez étendu au moyen des angles et des côtés seulement, l'opération exigerait de nombreux tâtonnements, et entraînerait une perte de temps que l'on évitera, sinon en totalité, au moins en grande partie, en opérant sur des lignes convenablement repérées.

CHAPITRE IV.

§ XIV. NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE TRIGONOMÉTRIE.

ORIGINE ET BUT DE LA TRIGONOMÉTRIE PLANE.

68. La géométrie élémentaire fournit le moyen de déterminer trois parties inconnues d'un triangle, lorsque les trois autres sont données convenablement, c'est-à-dire quand on connaît un côté au moins.

Ces constructions géométriques, bien que rigoureuses, donnent lieu par fois à des erreurs fort graves, que jamais on ne pourra éviter, malgré toute la perfection des instruments.

Aussi les anciens géomètres ont-ils compris la nécessité de se poser ce problème :

Connaissant trois données dans un triangle, trouver par le calcul les trois inconnues.

C'est là ce qu'on nomme résoudre un triangle. Et tel est le but de la trigonométrie plane dont nous allons donner quelques notions.

§ XV. INTRODUCTION DES ANGLES DANS LES CALCULS.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

69. Dans un triangle, un angle étant toujours plus grand que zéro et plus petit que 180° , nous n'allons nous occuper que des angles compris entre ces limites. (*Suppl.*, fig. 44.)

Considérons deux lignes ou axes coordonnés se coupant à angles droits, un angle aigu TOX, et du point *o* comme centre, avec l'unité comme rayon, décrivons une demi-circonférence qui coupe TO en S.

1° La perpendiculaire SI mesurée avec OS pris pour unité, donne un nombre qu'on appelle le sinus de l'angle considéré α , et on écrit $\sin. \alpha = SI = 0,5475$ par exemple.

2° La perpendiculaire SN est le cosinus de l'angle α , et on écrit $\cosin. \alpha = SN = 0,4703$.

3° La perpendiculaire TA tangente à la demi-circonférence se nomme la tangente de l'angle α , et on écrit : $\text{tang. } \alpha = AT$.

4° Enfin la tangente EC qui, comme la tangente AT, vient aboutir au côté OT de l'angle, se nomme la cotangente de l'angle α , qu'on écrit d'une manière abrégée : $\text{cotang. } \alpha = EC$.

Si au lieu de prendre le rayon OA pour unité, on adoptait une autre ligne, on poserait :

$$\sin. \alpha = \frac{SI}{OS}, \quad \cosin. \alpha = \frac{SN}{OS}, \quad \text{tang. } \alpha = \frac{AT}{OA},$$

$$\text{Cotang. } \alpha = \frac{EC}{OE}.$$

D'après la théorie des triangles semblables, évidemment

les nombres de ces quatre rapports seraient les mêmes que ceux obtenus, en supposant le rayon $OE=1$.

Actuellement considérons un angle obtus SOX (*Suppl.*, *fig. 45*), on aura :

$$\begin{aligned}\sin. a &= \frac{SI}{OS}, \quad \cosin. a = \frac{SN}{OS}, \quad \text{tang. } a = \frac{AT}{OA}, \\ \text{Cotang. } a &= \frac{EC}{OE}.\end{aligned}$$

Si nous prenons le rayon $OE = 1$, il vient $\sin. a = SI$, $\cosin. a = SN$, $\text{tang. } a = AT$, $\text{cotang. } a = EC$.

Ces quatre nombres, qu'on peut toujours concevoir quand on considère un angle quelconque compris entre 0 et 180° , se nomment les *expressions* trigonométriques de l'angle considéré, et ces rapports sont donnés par les lignes indiquées sur la figure quand on suppose le rayon pris pour unité.

C'est au moyen de ces quatre expressions que nous ferons entrer les angles dans les calculs.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES POSITIVES ET NÉGATIVES.

70. En prenant le rayon de notre demi-circonférence égal à 1 , si nous traçons les quatre lignes trigonométriques dont nous avons parlé d'un angle aigu, ainsi que celle d'un angle obtus, on remarque, 1° que la tangente, la cotangente, le cosinus d'un angle obtus ont des situations tout-à-fait contraires aux lignes correspondantes d'un angle aigu ; 2° que les sinus ont des positions semblables.

Cette différence de position dans les lignes trigonométriques correspond à une manière différente d'introduire les expressions trigonométriques dans les calculs. — Et sans entrer dans d'autres développements, nous poserons les principes suivants, dont il faut d'abord se bien pénétrer :

1^o Quand dans un calcul on fera entrer les expressions trigonométriques d'un angle aigu, on les supposera toujours positives.

2^o Que l'angle soit aigu ou obtus, le sinus sera toujours pris positivement.

3^o Quand l'angle sera obtus, les expressions tangentes, cotangentes, cosinus, devront toujours se prendre négativement, c'est-à-dire comme quantités à retrancher; par un exemple, éclaircissons ce dernier point.

Supposons que par le calcul nous ayons obtenu la relation $X = a + \text{tang. } 121^{\circ} K$.

Au lieu d'ajouter à A la quantité $\text{tang. } 121^{\circ} K$, nous la retrancherons, ce qui donnera alors définitivement $X = a$ diminué du produit $\text{tang. } 121^{\circ} K$.

TRACÉ GRAPHIQUE D'UN ANGLE DONNÉ PAR SON EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE.

71. Supposons qu'on nous dise : le sinus d'un angle est de 0,734, tracez cet angle (*Suppl.*, fig. 46).

Soit σ l'angle cherché, d'un point a pris sur un côté abaissons ab perpendiculaire sur l'autre, on a $\sin. \sigma = \frac{ab}{oa} = 0.734$. Or si nous faisons ce qui est possible, $oa = 1 =$ au mètre, par exemple, on en conclura $ab = 0,734$, le problème est donc ramené à la construction d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypothénuse et un côté, lequel construit nous donne l'angle σ .

Il ne faut pas croire que cet angle seul réponde à la question, car le supplément de σ a même sinus d'après nos définitions mêmes, aussi dans ce cas on arrive à deux solutions, et la nature du problème nous indique quel choix nous devons faire.

Construisons encore l'angle pour lequel on aurait : $\cos. a = 0,425$. (*Suppl. fig. 47.*)

Soit toujours a l'angle cherché, on aura, quel que soit le point a ,

$$\cos. a = \frac{ob}{oa} = 0,425.$$

Comme précédemment, supposons oa égal au mètre, il vient $ob = 0^m.425$, aussi la connaissance de l'angle a est ramenée à la construction d'un triangle rectangle, dont on connaît les deux côtés de l'angle droit. Ces deux exemples font comprendre la marche à suivre pour les autres expressions, et nous voyons alors que par la connaissance d'une expression trigonométrique d'un angle, nous pouvons le tracer sans le secours du rapporteur.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES SUPPLÉMENTAIRES.

72. Concevons deux angles AOB et AOD supplémentaires, c'est-à-dire valant en somme deux droits ou 180° (*Suppl., fig. 48*). Du point O comme centre et avec l'unité pour rayon, décrivons une demi-circonférence.

L'inspection de la figure, ainsi que les principes précédents nous montrent : 1^o que deux angles supplémentaires ont le même sinus, $BS = DS'$ pris toujours positivement.

2^o Que leurs tangentes, AT, AT', leurs cotang. FK, FK' sont égales, mais de position contraire, et qu'en vertu du principe posé, elles doivent entrer d'une manière différente dans les calculs, c'est-à-dire positivement quand l'angle est aigu, négativement quand l'angle est obtus.

3^o Enfin, relativement au cosinus, ils sont égaux et de signes contraires, c'est-à-dire entrant dans les calculs comme quantités *additives* quand ils appartiennent à un angle aigu, comme quantités *soustractives* quand ils appartiennent à un angle obtus.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES
COMPLÉMENTAIRES.

73. Soient les deux angles $BOA = a$, $BOD = b$ (*supp. fig. 49*) valant en somme un droit ou 90° . Toujours de O comme centre et avec l'unité pour rayon, décrivons un quart de cercle. Nous avons :

$$1^0 \text{ Sin. } a = \text{Cosin. } b = BS.$$

$$2^0 \text{ Tang. } a = \text{Cotang. } b = AT.$$

$$3^0 \text{ Cosin. } a = \text{Sin. } b = CB = OS.$$

$$4^0 \text{ Cotang. } a = \text{Tang. } b = DT'.$$

Ces relations si simples à apercevoir par la *fig. même*, nous conduisent à dire :

1^o Le sinus d'un angle a = le cosinus de son complément.

2^o La tangente d'un angle a = la cotangente de son complément.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES RAMENÉES AU PREMIER
CADRAN.

74. Les deux paragraphes qui précèdent nous conduisent à reconnaître, qu'il suffit d'avoir toutes les expressions trigonométriques des angles compris entre 0 et 45° pour connaître toutes les autres : en effet, si l'on demande sinus 150° , nous savons que ce sinus est égal à sinus 30° , et qu'ensuite sinus 30° vaut cosinus 40° .

Nous engageons le lecteur à faire diverses applications pour se bien pénétrer de ce principe important.

Exemple :

$$\text{Cosin. } 120^\circ = - \text{cosin. } 60^\circ = - \text{sin. } 30^\circ.$$

SUR LA MANIÈRE D'OBTENIR LES EXPRESSIONS
TRIGONOMÉTRIQUES.

75. Puisque nous nous proposons de faire entrer les angles dans les calculs par les quatre expressions trigonométriques, que nous venons de reconnaître, une question importante se présente ici : Comment détermine-t-on les expressions.

Evidemment, ce doit être par le calcul, car déterminées graphiquement elles ne seraient plus d'aucune utilité, puisqu'à des opérations graphiques, elles substitueraient d'autres opérations graphiques.

Les calculs à faire pour atteindre ce but ne peuvent être développés ici ; cependant, pour en donner une idée au lecteur, nous lui proposons de calculer les quatre expressions trigonométriques de l'angle 30° , il trouvera les calculs suivants (*Sup. fig. 30*).

$$\text{Sin. } 30^\circ = \text{cosin. } 60^\circ = \frac{y}{R} = 0.50$$

$$\text{Cosin. } 30^\circ = \text{sin. } 60^\circ = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Tang. } 30^\circ = \text{cotang. } 60^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cotang. } 30^\circ = \text{Tang. } 60^\circ &= \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Pour arriver à ces formules il suffit de se rappeler que le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon, et connaître le carré de l'hypothénuse (1).

§ XVI. TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

1° *Connaissant un angle, trouver une des expressions trigonométriques.*

76. Ce problème, par la disposition même des tables qui suivent, et qui se comprennent d'elles-mêmes, ne peut offrir aucune difficulté.

Exemple :

Trouver la tangente de $30^{\circ} 45'$. Cherchons l'angle de 30° par le haut des tables, $45'$ dans la colonne des minutes qui descend de ce nombre 30° , et nous trouvons $\text{tang. } 30^{\circ} 45' = 0,51129$.

Autre exemple :

Chercher $\cosin. 60^{\circ} 21'$. On a $\cosin. 60^{\circ} 21' = \sin. 29^{\circ} 39' = 0,49470$.

Remarque. Directement on pouvait trouver ce nombre, par le nombre de degrés situé au bas des pages, et $21'$ dans la colonne qui monte à partir de 60° , on trouvait de suite :

$\cosin. 60^{\circ} 21' = 0,49470$. Cette double entrée des tables est la conséquence de la propriété des angles complémentaires.

Recherchons la tangente de $110^{\circ} 37'$.

On a $\text{tang. } 110^{\circ} 37' = -\text{tang. } 79^{\circ} 23' = - (3. 33487)$.

$$(1) x^2 = R^2 - y^2$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi ce nombre entraînera une opération de soustraction dans le calcul.

2. *Connaissant une expression trigonométrique, trouver l'angle.*

77. *Premier exemple.* On a $\text{tang. } x = 0,20527$.

Pour trouver l'angle x , nous cherchons le nombre donné dans les colonnes intitulées tangentes, soit en partant du haut des tables, soit en partant du bas, suivant le cas; on trouve alors que ce nombre correspond à $x = 11^{\circ} 36'$.

Remarque. Si l'on avait eu $\text{tang. } x = -0,20527$, on aurait $x = 78^{\circ} 21'$.

Deuxième exemple. $\text{Sin. } x = 0,98207$.

Ici, il faut avoir recours aux degrés au bas des pages, et l'on trouve pour x les deux angles suivants, savoir : $x = 79^{\circ} 8' = 100^{\circ} 52'$.

Troisième exemple. Trouver $\text{Cosin. } x = 0,84743$.

Cherchons sans égard au signe le nombre 0,84743, dans les colonnes des cosinus, nous trouvons qu'il correspond à $x = 32^{\circ} 4'$, et comme ce nombre est négatif, c'est le supplément qu'il faut prendre, c'est-à-dire $x = 147^{\circ} 56'$.

Remarque. Si l'on avait à calculer par exemple la cotang. de $27^{\circ} 17' 32''$, ou bien à trouver à quel angle correspond $\text{tang. } x = 27,51924$, on pourrait : 1^o Dans le premier cas, négliger les secondes et chercher $\text{sin. } 27^{\circ} 17'$ ou $\text{sin. } 27^{\circ} 18'$, suivant ce qu'on néglige.

2^o Dans le second cas, on chercherait les deux angles entre lesquels tombe $\text{tang. } x = 27,51924$, et l'on prendrait celui dont la tangente s'approche le plus du nombre donné.

Généralement ces calculs suffiront dans la pratique, mais si l'on veut pousser plus loin l'exactitude, on le fera par la méthode des proportions, calculs qui ne peuvent embarrasser.

§ XVII. RÉOLUTION DES TRIANGLES.

1^o TRIANGLE RECTANGLE.

Premier problème. 78. Etant donné l'hypothénuse b , et un côté a , trouver les quatre autres parties. (*Suppl. f. 51*).

$$B = 90^{\circ}$$

$$b^2 = a^2 + d^2$$

$$\text{d'où} \quad d = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(b + a)(b - a)}$$

$$\text{Sin. } A = \frac{a}{b}$$

Ainsi les tables donnent A , à une minute près, et alors D sera connu, puisqu'on doit avoir :

$$A + B + D = 180^{\circ}$$

Deuxième problème. Connaissant b et l'angle D , par exemple, on a $\frac{a}{b} = \cosin. D$, d'où $a = b \cosin. D$, et le problème ramené au premier par le calcul de $d - A$ est résolu de suite.

Remarque. Considérons une ligne indéfinie AB (*Suppl. f. 52*) prise comme axe, et une droite finie CD , située comme on voudra : Prenons la projection orthogonale de cette droite, soit MN , on aura $CK = CD \times \cosin. a$, ou bien $MN = CD \times \cosin. a'$; c'est-à-dire, que la projection MN d'une droite CD sur un axe AB , est égale à cette même droite CD multipliée par le cosinus de l'angle formé par l'axe AB et le prolongement de la droite finie CD .

Troisième problème. Connaissant les deux côtés de l'angle droit, trouver les autres parties (*Suppl. f. 51*), on a :

$$a^2 + d^2 = b^2, \text{ d'où } b = \sqrt{a^2 + d^2}$$

ou bien, puisque $a = b \cosin. D$, $d = b \cosin. A$, il s'ensuit aussi,

$$b = \frac{a}{\cosin. D} = \frac{d}{\cosin. A}$$

b étant connu, il ne reste plus qu'à déterminer un des angles aigus, comme on l'a fait au problème n° 1.

Quatrième problème. Connaissant un côté de l'angle droit d , et l'angle A on a :

$$d = b. \cosin. A, \text{ d'où } b = \frac{D}{\cos. A}$$

Connaissant b , on retombe alors sur le problème 1 dans lequel on a l'hypothénuse et un côté de l'angle droit.

2^e TRIANGLES QUELCONQUES.

Principes fondamentaux.

79. *Premier principe.* Dans un triangle les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés.

Ainsi, on a par exemple (*Suppl. fig. 53*) :

$$a : b :: \sin. A : \sin. B.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \sin. A &= \frac{h}{b} \sin. B = \frac{h}{a} \text{ d'où } \frac{\sin. A}{\sin. B} \\ &= \frac{a}{b} \text{ ou bien la proportion } a : b :: \sin. A : \sin. B. \end{aligned}$$

Deuxième principe. Dans un triangle quelconque ABD (*Suppl. fig. 54*), un côté quelconque est égal à la somme des deux autres côtés, moins le double produit de ces deux côtés multipliés par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés.