
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 528, 1024, 2048, 4096, 8196, etc.

Par exemple, en code Morse deux signaux élémentaires sont utilisés : le tiret et le point (il y a aussi des règles sur les espacements entre les symboles pour faciliter la lisibilité des messages). À la première impulsion, seuls deux choix sont possibles, le point ou le tiret ; avec deux impulsions, le nombre de possibilités est doublé puisqu'on peut ajouter un point ou un tiret, au choix, après le premier signal transmis ; avec trois impulsions, huit séries sont possibles, puis seize avec quatre impulsions, etc. Les puissances de 2 permettent donc de compter les mots du code Morse qu'il est possible d'écrire en fonction du nombre d'impulsions.

[illegible]

■ **Les puissances de 10.**— Si 2 est remplacé par 10, la suite obtenue commence par 10, $10 \times 10 = 100$, $10 \times 10 \times 10 = 1000$, etc. Cette suite de nombres est si fréquente que

- certains termes ont une appellation spécifique (centaine, millier, million) ;
- la notation mathématique 10^n est maintenant d'usage courant : 10^3 correspond à $10 \times 10 \times 10 = 1000$, 10^6 à un million, 10^9 à un milliard, etc.

Et lorsqu'on parle d'un disque dur d'un téra-octet, on mélange implicitement les deux gammes précédentes : téra réfère à 10^{12} , soit mille milliards ; donc un téra-octet désigne la capacité de stockage, ou d'information, contenue dans une suite de mille milliards d'octets, soit au total mille milliards séquences de huit nombres égaux à 0 ou 1.

■ **Les puissances d'un nombre.**— La notation 10^n indique le nombre obtenu en multipliant 10 par lui-même $n - 1$ fois de suite ; par exemple, 10^2 est obtenu en multipliant 10 avec lui-même 1 fois : il y a une seule multiplication, de deux termes, et ces deux termes sont égaux à 10. Cette notation peut être employée pour tous les nombres.

Si n est un nombre entier positif (par exemple $n = 7$), et a est n'importe quel nombre réel (par exemple $a = 2, 3, 2$ ou le nombre π), nous noterons a^n le résultat de l'opération qui consiste à multiplier entre elles n copies du nombre a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois le terme } a \text{ et } (n-1) \text{ multiplications}}$$

On lit cette opération a puissance n , et l'on parle donc de la suite des puissances de a . Et dans le produit a^n , l'entier n s'appelle la puissance ou encore l'exposant. L'aire d'un carré de côté a est égale à $a \times a = a^2$; la deuxième puissance a^2 est donc communément appelée *carré de a* . De même, a^3 peut-être lu a puissance 3 ou a cube, au choix, car le volume d'un cube de côté a est égal à a^3 . Ainsi, mille est le cube de 10, et 1024 est la dixième puissance de 2. Dans l'exemple de $a = 3.2$ les premières puissances sont 3.2, $(3.2)^2 = 10.24$, $(3.2)^3 = 32.768$, etc.

Nous avons défini a^n directement en disant que c'est le résultat obtenu en multipliant a par lui-même $n - 1$ fois. Nous aurions pu définir aussi a^n de proche en proche en disant que $a^1 = a$, puis que a^{n+1} s'obtient en multipliant par a le terme précédent de la suite, c'est-à-dire $a^{n+1} = a \times a^n$.

Les deux points de vue sont équivalents. Ainsi, a^n est juste la notation courante pour la suite définie par récurrence par $u_1 = a$ et $u_{n+1} = a \times u_n$.

■ **De l'addition à la multiplication.**— Nous allons établir quelques propriétés importantes satisfaites par a^n qui, quand on les connaît, permettent une manipulation plus efficace des puissances.

Théorème.— *Les puissances d'un nombre réel a vérifient $a^{m+n} = a^m \times a^n$, ceci pour toute paire de nombres entiers m et n strictement positifs.*

Cette propriété signifie que les puissances successives d'un nombre a transforment l'addition (de n avec m) en la multiplication (de a^n avec a^m). Par exemple, avec $a = 3$, $n = 3$ et $m = 7$, la relation obtenue est $3^{10} = 3^3 \times 3^7$.

Démonstration.— Par définition, a^n est égal au produit de a avec lui même n fois. Si l'on multiplie a^m par a^n on doit donc effectuer la multiplication suivante :

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ termes}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ termes}} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ termes}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

C'est l'égalité cherchée. □

Théorème.— *Si n est un entier positif alors $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ pour tous nombres réels a et b .*

Démonstration.— Ceci résulte des égalités suivantes

$$\begin{aligned} a^n \times b^n &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ termes}} \\ &= \underbrace{((a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b))}_{n \text{ termes}}, \end{aligned}$$

que l'on obtient en changeant l'ordre des multiplications. □