

Puissances

■ **Les puissances de 2.**— Si l'on multiplie 2 par lui même, on obtient 4. Et si l'on recommence on obtient $2 \times 4 = 8$, puis $2 \times 8 = 16$. La séquence des nombres obtenus en répétant cette opération commence par

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, etc.

C'est ce qu'on appelle la suite des puissances de 2. Cette suite de nombres entiers apparait fréquemment dans la vie courante, même si c'est souvent de manière cachée. Prenons l'exemple du code Morse : deux signaux élémentaires sont utilisés, le tiret — et le point . À la première impulsion, seuls deux choix sont offerts, le point ou le tiret ; avec deux impulsions, le nombre de possibilités est doublé puisqu'on peut ajouter un point ou un tiret, au choix, après le premier signal transmis : il y a donc quatre mots possibles pour un signal de deux impulsions

— —, — ., . —, ..

Avec trois impulsions, huit séries sont disponibles, puis seize avec quatre impulsions, etc. Les puissances de 2 permettent donc de compter les mots du code Morse qu'il est possible d'écrire en fonction du nombre d'impulsions.

Au lieu des points et des tirets, on peut utiliser des 0 et des 1 ; c'est ce qui est employé pour coder une information en binaire. Les informaticiens appellent bit un signal unique constitué d'un 0 ou d'un 1 (ou de l'alternative Vrai / Faux) et octet une suite de huit bits, c'est-à-dire une suite de huit signaux égaux à 0 ou 1 : un octet offre donc 256 possibilités. Deux octets successifs offrent

$$256 \times 256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 65536$$

séries possibles de seize bits.

■ **Les puissances de 10.**— Si 2 est remplacé par 10, la suite obtenue commence par 10, $10 \times 10 = 100$, $10 \times 10 \times 10 = 1000$, etc. Cette suite de nombres est si fréquente que

- certains termes ont une appellation spécifique (centaine, millier, million) ;
- la notation mathématique 10^n est maintenant d'usage courant : 10^3 correspond à $10 \times 10 \times 10 = 1000$, 10^6 à un million, 10^9 à un milliard, etc.

Et lorsqu'on parle d'un disque dur d'un téra-octet, on mélange implicitement les deux gammes précédentes : téra réfère à 10^{12} , soit mille milliards ; un téra-octet désigne la capacité de stockage, ou d'information, contenue dans une suite de mille milliards d'octets, soit au total mille milliards séquences de huit nombres égaux à 0 ou 1.

■ **Les puissances d'un nombre.**— La notation 10^n indique le nombre obtenu en multipliant 10 par lui-même $n - 1$ fois de suite ; par exemple, 10^2 est obtenu en multipliant 10 avec lui-même 1 fois : il y a une seule multiplication, de deux termes, et ces deux termes sont égaux à 10. Dit autrement, 10^n s'obtient en partant du nombre 1 et en le multipliant n fois de suite par 10.

Cette notation peut être employée pour tous les nombres. Si n est un nombre entier positif (par exemple $n = 7$), et a est n'importe quel nombre réel (par exemple $a = 2$, ou 3.2, ou le nombre $-\pi$), nous noterons a^n le résultat de l'opération qui consiste à multiplier entre elles n copies du nombre a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois le terme } a \text{ et } (n-1) \text{ multiplications}}$$

On lit cette opération *a puissance n*, et l'on parle donc de la suite des puissances de a . Dans le produit a^n , l'entier n s'appelle la puissance ou encore l'exposant.

L'aire d'un carré de côté a est égale à $a \times a = a^2$; la deuxième puissance a^2 est donc communément appelée *carré de a*. De même, a^3 peut-être lu *a puissance 3* ou *a cube*, au choix, car le volume d'un cube de côté a est égal à a^3 .

Ainsi, mille est le cube de 10, et 1024 est la dixième puissance de 2. Dans l'exemple de $a = 3.2$ les premières puissances sont 3.2, $(3.2)^2 = 10.24$, $(3.2)^3 = 32.768$, etc.

Nous avons défini a^n directement en disant que c'est le résultat obtenu en multipliant a par lui-même $n - 1$ fois. Nous aurions pu définir aussi a^n de proche en proche en disant que $a^1 = a$ puis, pour $n \geq 2$, que a^n s'obtient en multipliant par a le terme précédent de la suite, c'est-à-dire $a^n = a \times a^{n-1}$ ⁽¹⁾. Les deux points de vue sont équivalents car pour calculer le produit $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ on peut effectuer le produit pas à pas en commençant par a , puis en le multipliant par a successivement $n - 1$ fois. ⁽²⁾

■ **De l'addition à la multiplication.**— Nous allons établir quelques propriétés importantes satisfaites par a^n qui, quand on les connaît, permettent une manipulation plus efficace des puissances.

Théorème.— *Les puissances d'un nombre réel a vérifient $a^{m+n} = a^m \times a^n$, ceci pour toute paire de nombres entiers m et n strictement positifs.*

Cette propriété signifie que les puissances successives d'un nombre a transforment l'addition (de n avec m) en la multiplication (de a^n avec a^m). Par exemple, avec $a = 3$, $n = 3$ et $m = 7$, la relation obtenue est $3^{10} = 3^3 \times 3^7$.

Démonstration.— Par définition, a^n est égal au produit de n copies du nombre a . Le produit de a^m par a^n est donc donné par la multiplication suivante :

$$a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ termes}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ termes}}.$$

Le terme de droite comporte $m + n$ copies du nombre a , donc

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ termes}} = a^{m+n}$$

C'est l'égalité cherchée. □

Théorème.— *Si n est un entier positif alors $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ pour tous nombres réels a et b .*

1. Ainsi, $a^1 = a$ par définition, puis $a^2 = a \times a^1$ car $2 = 1 + 1$ et l'on retrouve bien $a^2 = a \times a$; puis $a^3 = a \times a^2 = a \times (a \times a) = a \times a \times a$, etc.

2. **Pour les élèves de Terminale** : ainsi, a^n est juste la notation courante pour la suite définie par récurrence par $u_1 = a$ et $u_{n+1} = a \times u_n$.

Ainsi, avec $a = 7$, $b = 5$ et $n = 4$ nous obtenons

$$7^4 \times 5^4 = (35)^4$$

(en développant les puissances, il vient $2401 \times 625 = 1500625$).⁽³⁾.

Démonstration. – Ceci résulte des égalités suivantes

$$\begin{aligned} a^n \times b^n &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ termes}} \\ &= \underbrace{((a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b))}_{n \text{ termes}}, \end{aligned}$$

que l'on obtient en changeant l'ordre des multiplications. □

3. **Pour aller plus loin** : il n'y a pas de formule simple pour l'expression de $(a + b)^n$. Avec $n = 1$ on trouve $a + b$, avec $n = 2$ on trouve $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$, avec $n = 3$ on obtient $a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3$. La formule générale, dite formule du binôme de Newton, fait intervenir les coefficients binomiaux ; ces nombres entiers sont ceux qui apparaissent dans le triangle de Pascal (voir [https ://images.math.cnrs.fr/Le-triangle-de-Pascal.html](https://images.math.cnrs.fr/Le-triangle-de-Pascal.html))