Puissances négatives

Du macroscopique au microscopique.— Si n est un entier strictement positif, la notation 10^n désigne le produit

$$\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n\ termes} = 1\underbrace{000 \cdots 0}_{n \text{ zéros}}.$$

Lorsque n croît, la suite 10^n croît extrêmement vite. Les puissances de 10 sont donc utilisées pour des ordres de grandeur correspondant souvent à des données gigantesques. Par exemple, la constante d'Avogadro N_A vaut à peu près 6×10^{23}, ce qui signifie qu'il y a environ 6×10^{23} atomes dans 12 grammes de carbone ; la définition exacte de ce nombre a changé récemment : elle est maintenant fixée, conventionnellement, à la valeur [1]

$$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}.$$

D'autres exemples sont fournis par la vitesse de la lumière, environ 3×10^8 mètres par seconde, ou par le nombre de pages web, environ $1,7 \times 10^9$ pages en 2019, ou le volume de la Terre, environ 10^{24} litres. Si vous désirez vous familiariser avec des nombres encore plus grands, n'hésitez pas à visionner la vidéo de Mickaël Launay intitulée "*Des nombres grands, TRÈS grands*".

Lorsque les objets scrutés sont microscopiques, ont utilise des puissances négatives : un millimètre correspond à 10^{-3} mètre, c'est la graduation la plus fine d'une règle ; le diamètre d'un atome est de l'ordre du dixième de nanomètre, soit 10^{-10} mètre. La notation 10^{-n} est similaire à la notation 10^n, mais en remplaçant 10 par son inverse $1/10$:

$$10^{-1} = 1/10 \ = \ 0.1,$$

$$10^{-2} = (1/10) \times (1/10) \ = \ 0.01,$$

1. La constante d'Avogadro a une unité qui n'est pas mentionnée ici. Il s'agit d'une unité sans dimension, qui est l'inverse de la mole ; si on se donne 3.5 moles d'un certain type d'objets, par exemple d'atomes de plomb, c'est qu'il y a $(3.5) \times N_A \simeq 21 \times 10^{23}$ objets dans l'ensemble considéré.

et ainsi de suite. Donc 10^{-n} est égal à $(1/10)^n$ et c'est l'inverse de 10^n : $10^{-n} = 1/(10^n) = (1/10)^n$; en notation décimale, 10^{-n} est égal à $0.0...01$ avec n zéros (donc $n-1$ zéros entre la virgule et le 1). Avec cette nouvelle notation, nous allons voir que la propriété de multiplicativité

$$10^{n+m} = 10^n \times 10^m,$$

est satisfaite pour n'importe quelle paire d'entiers relatifs, quels que soient leurs signes.

■ **Une définition forcée ?—** Au lieu de nous attarder sur les puissances de 10, considérons celles de n'importe quel nombre a différent de zéro. Et changeons légèrement de point de vue.

Nous allons réfléchir de façon abstraite aux définitions possibles des puissances a^n (pour n entier relatif) lorsque, d'entrée de jeu, on souhaite imposer les deux contraintes suivantes :

— pour $n = 1$, nous voulons $a^1 = a$;

— pour toute paire d'entiers n et m, nous voulons $a^{n+m} = a^n \times a^m$.

La première contrainte signifie juste que l'on souhaite vraiment parler des puissances de a : il s'agit bien de démarrer avec a lorsque $n = 1$, et pas avec un autre nombre. La seconde stipule que les a^n doivent transformer la somme $n + m$ en le produit $a^n \times a^m$. Notez qu'on parle ici de *deux* contraintes, mais la seconde résume en fait tout un ensemble de règles, puisqu'elle impose une relation pour toute paire d'entiers n et m, de signes quelconques.

Les définitions déjà vues, ou connues, sont donc temporairement oubliées ; au lieu de définir a priori les puissances a^n et de vérifier ensuite que la relation $a^{n+m} = a^n \times a^m$ est satisfaite, nous partons de cette relation et étudions ce qu'elle force, où elle mène nécessairement.

En fait, ces contraintes ne laissent aucune latitude, aucun choix, quant à la définition des termes a^n. Par exemple, a^2 doit être égal à $a^1 \times a^1$ en appliquant la seconde règle pour $n = 1$, $m = 1$, et $n + m = 2$; avec la première règle on voit donc que $a^2 = a \times a$. Puis $a^3 = a^1 \times a^2 = a \times (a \times a)$, $a^4 = a \times a^3 = a \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a$, et ainsi de suite. Ce raisonnement de proche en proche (le terme technique est « par récurrence ») montre que les deux contraintes édictées ci-dessus entrainent

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ termes}$$

pour tout $n > 0$. C'est la définition déjà employée dans le premier paragraphe pour $a = 10$.

Qu'impose la contrainte $a^{n+m} = a^n \times a^m$ lorsque $n = 1$ et $m = 0$? Puisque $1 + 0 = 1$, cela donne $a^1 = a^1 \times a^0$ et comme $a^1 = a$ n'est pas nul (par hypothèse), on voit en simplifiant par a que a^0 doit être égal à 1. Nous conviendrons donc que

$$a^0 = 1$$

pour tout $a \neq 0$. Les règles que nous avons imposées conduisent ainsi à une définition nouvelle, que nous n'avions pas utilisée jusqu'à présent. Si vous êtes complètement perdu par ce type de raisonnement, il est temps de s'octroyer une petite pause : je vous suggère de visionner le sketch de Raymond Devos intitulé « Parler pour ne rien dire », que l'on trouve sur Youtube[2].

Lorsque n est négatif et que l'on choisit $m = -n$, la relation $a^{n+m} = a^n \times a^m$ impose $a^0 = a^{n-n} = a^n \times a^{-n}$; ici, le terme a^{-n} est déjà défini car $-n = |n|$ est positif. Puisque nous avons défini $a^0 = 1$, nous sommes conduits à $a^n \times a^{|n|} = 1$, et comme $a \neq 0$ nous obtenons

$$a^n = \frac{1}{a^{|n|}} = \frac{1}{a^{-n}} \quad \text{si } n \text{ est un entier négatif;}$$

formule que l'on peut réécrire sous la forme

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{si } m \text{ est un entier positif.}$$

Par exemple $8^{-5} = \frac{1}{8^5}$, pour $a = 8$ et $m = 5$, ou encore $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$; on retrouve l'usage courant. Résumons. Une fois imposées les contraintes $a^1 = a$ et $a^{n+m} = a^n \times a^m$ pour toute paire d'entiers (n, m), alors nécessairement

2. https ://www.youtube.com/watch ?v=hz5xWgjSUlk

(1) Exposants positifs.– $\mathrm{a^n}$ **est égal à** $\mathrm{a \times a \times \cdots \times a}$ **(**n **termes égaux à** a**) lorsque** $\mathrm{n} > 0$**,**

(2) Exposant nul.– $\mathrm{a}^0 = 1$ **(c'est le cas** $\mathrm{n} = 0$**),**

(3) Exposants négatifs.– $\mathrm{a^{-n}} = 1/(\mathrm{a^n}) = (1/\mathrm{a})^\mathrm{n}$ **lorsque** n **est positif.**

Les puissances d'un nombre réel a distinct de zéro sont donc *définies de cette manière*. Ce choix est justifié simultanément par l'exemple classique de 10^{-n} et par notre volonté d'imposer $a^{n+m} = a^n \times a^m$.

Ce raisonnement que nous venons de présenter dans le cadre des puissances d'un nombre réel est très fréquent en mathématique : il s'agit de déterminer la définition à laquelle conduit *nécessairement* une liste de contraintes, de propriétés, que l'on souhaite imposer à un objet mathématique (ici les puissances de a).

■ **Addition/multiplication.—** Avec la définition fournie ci-dessus (voir les points (1), (2) et (3) en gras), nous allons obtenir le théorème suivant.

Théorème.– *Les puissances vérifient*

$$a^{m+n} = a^m \times a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn} \;\; \textit{et} \;\; a^n \times b^n = (a \times b)^n,$$

ceci pour toute paire d'entiers relatifs m *et* n *et toute paire de nombres* a *et* b *non nuls.*

Attention, il reste à démontrer ce théorème, y compris $a^{m+n} = a^m \times a^n$. Ceci correspond à la seconde contrainte que nous nous étions imposée, contrainte qui nous a conduit à la définition ci-dessus par l'analyse de certains cas particuliers, par exemple le cas $m = -n$, et a donc montré que cette définition était nécessaire. Il reste à voir que cette définition permet bien a posteriori d'établir la règle voulue *dans tous les cas de figure*. Pour bien comprendre l'enjeu, décrivons un autre exemple de règles et définitions forcées. Six personnes désignées par les lettres A, B, C, D, E et F sont assises dans cet ordre autour d'une table ronde ; ainsi, B est assise à droite de A et à gauche de C, et F est assise entre E et A. On désire donner une petite somme d'argent à chacune d'entre elles en respectant les deux règles suivantes :

— la personne A reçoit exactement une pièce ;
— si une personne est assise à la droite d'une autre, elle reçoit une pièce de plus que cette dernière.

Ces deux règles forcent les choix suivants : puisque A reçoit une pièce (première règle) et que B est assise à droite de A, alors B reçoit deux pièces (seconde règle). Puis, C étant la voisine de droite de B, elle reçoit trois pièces ; puis D reçoit quatre pièces, E en reçoit cinq et F en reçoit six. Voilà ce à quoi nous sommes nécessairement conduits ! Mais ces choix nécessaires contredisent finalement la seconde règle : A étant assise à droite de F devrait recevoir sept pièces, alors qu'une seule pièce lui est attribuée. Ici, le raisonnement montre que les deux règles que nous voulions imposer sont contradictoires.

Après ce préambule, nous pouvons maintenant démontrer le théorème. Nous n'aborderons que la première propriété énoncée, et vous encourageons à établir les deux autres.

■ **Esquisse de démonstration du théorème pour $a^{m+n} = a^m \times a^n$.—** Plusieurs cas peuvent être distingués. Lorsque $m = 0$, alors $m + n = n$ et $a^m = 1$ donc les termes de gauche et de droite de l'équation $a^{m+n} = a^m \times a^n$, sont égaux à a^n ; de même si $n = 0$, les deux termes valent a^m.

Si m et n sont positifs [3], les deux termes sont le résultat de la même opération, à savoir la multiplication de $m + n$ copies de a.

Lorsque m est positif et n est négatif, des simplifications ont lieu. Traitons par exemple le cas $m > |n|$, en notant ℓ la différence, de sorte que $m = \ell + |n|$; alors $a^m = a^\ell \times a^{|n|}$ (ce que nous avons déjà montré car $|n|$ et ℓ sont positifs), et donc $a^m \times a^n = a^\ell \times (a^{|n|} \times a^n)$ mais le produit entre parenthèse est égal à 1 par définition de a^n lorsque n est négatif.

Les cas restants peuvent être analysés de manière similaire, et nous encourageons la lectrice (ou le lecteur) à les traiter elle-même (ou lui-même) : il s'agit du cas $n > |m|$ avec m négatif, et du cas où m et n sont tous deux négatifs. □

3. Voir le texte "Puissances" pour plus de détails sur cette étape.