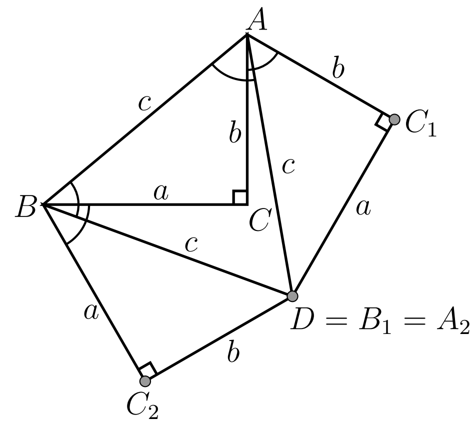
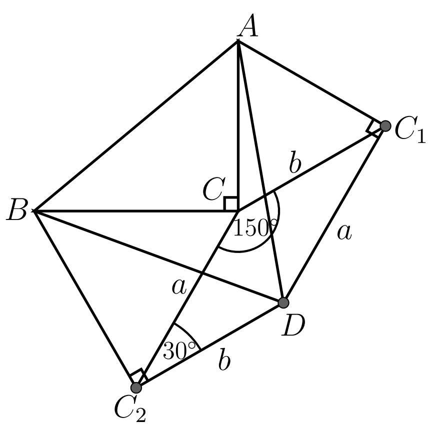
Para comenzar, sean A, B, C los vértices del triángulo, con ángulo recto en C. Rotemos el triángulo en 60º en sentido antihorario con centro en A, y en 60º en sentido horario con centro en B, como se muestra en la figura de la derecha. Denotemos C_1, B_1 y C_2, A_2 las imágenes de los vértices obtenidos. Observa que $\overline{BA_2} = c = \overline{AB_1}$ y $\angle ABA_2 = \angle BAB_1 = 60^{\circ}$. Por lo tanto, A_2 y B_1 coinciden; si denotamos D dicho punto, entonces A, B y D son los vértices de un triángulo equilátero de lado c.



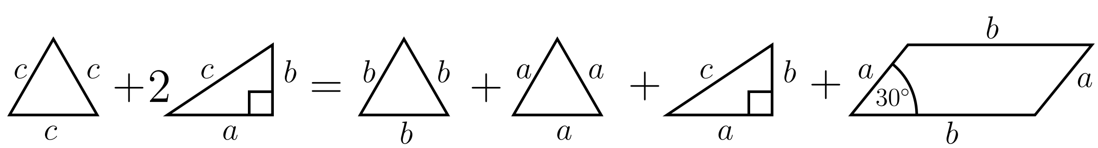


Observa, además, que $\triangle BCC_2$ y $\triangle ACC_1$ son triángulos equiláteros de lados a y b respectivamente. Más aún, los triángulos $\triangle BC_2D$ y $\triangle AC_1D$ son ambos congruentes a $\triangle BCA$.

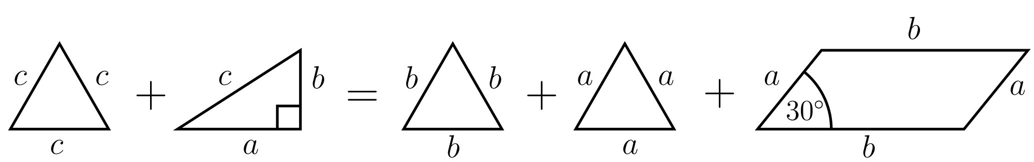
Considerando ahora las áreas de las piezas involucradas, tenemos

$$ABC_2DC_1 = ABD + BC_2D + AC_1D = ACC_1 + BCC_2 + BCA + C_2DC_1C.$$

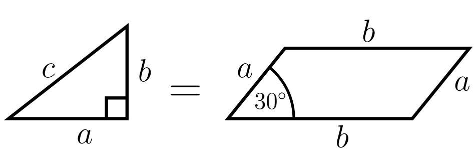
De manera más pictórica,



lo cual nos da



Hemos reducido, entonces, el problema a probar que



Para esto, observa que C_2DC_1C es un paralelógramo de lados a y b. Además, como $\angle BCA$ es un ángulo recto, necesariamente $\angle C_1CC_2$ debe ser igual a 150º, por lo que

$$\angle CC_2D = \angle DC_1C = 30^{\text{o}}.$$

Una salida rápida al problema consiste en usar la trigonometría:

$$\varparallelogram\, C_1CC_2D = ab \operatorname{sen}(30^{\text{o}}) = \frac{1}{2}ab = \triangle BCA.$$

Sin embargo, se puede evitar su uso observando la figura de abajo, en la cual el triángulo de la izquierda es la mitad de un triángulo equilátero, razón por la cual la altura del paralelógramo debe ser igual a $a/2$.