Liberté du groupe des orientations du bout d'une chaîne de tétraèdres

Complément à l'article «Peut-on faire un anneau de tétraèdres ?» – Images des Mathématiques, CNRS, 2015

On considère deux rotations vectorielles H et G de l'espace $\mathbb{R}^3$, d'axes orthogonaux et d'angle $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.

$\boxed{1}$ Montrer que dans une base orthonormée bien choisie, elles auront pour matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dans le groupe $SO(3)$.

On souhaite prouver que tout *mot réduit* $M = C_1 C_2 \dots C_n \in SO(3)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $C_i = A^\varepsilon$ ou B^ε avec $\varepsilon = \pm 1$ et $C_{i+1} \neq C_i^{-1}$, est différent de la matrice identité I_3.

Pour cela, on fixe un tel mot M et on définit les nombres a_i, b_i et c_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ par

$$C_1 C_2 \dots C_i = \begin{pmatrix} \frac{a_i}{3^i} & \frac{b_i 2\sqrt{2}}{3^i} & \frac{c_i}{3^i} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

On pose de plus : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

$\boxed{2}$ Montrer que l'on peut supposer que $C_1 = A^\varepsilon$ sans perdre de généralité.

$\boxed{3}$ a) Soit $i \geqslant 0$ tel que $C_{i+1} = A^\varepsilon$. Exprimer a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} en fonction de a_i, b_i et c_i. On notera $(*_A)$ les relations obtenues.

b) Soit $i \geqslant 1$ tel que $C_{i+1} = B^\varepsilon$. Exprimer de même a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} en fonction de a_i, b_i et c_i. On notera $(*_B)$ les relations obtenues.

c) Déduire de $(*_A)$ et de $(*_B)$ que a_i, b_i et c_i sont entiers pour tout i.

$\boxed{4}$ Soit $i \geqslant 1$. En utilisant $(*_A)$ et $(*_B)$:

a) montrer que, si $C_i = C_{i+1}$, alors $b_{i+1} = 2b_i - 9b_{i-1}$;

b) montrer que, si $C_i = A^{\pm 1}$ et $C_{i+1} = B^\varepsilon$, alors $b_{i+1} = b_i + 3\varepsilon c_{i-1}$;

c) montrer que, si $C_i = B^{\pm 1}$ et $C_{i+1} = A^\varepsilon$, alors $b_{i+1} = b_i - 3\varepsilon a_{i-1}$.

$\boxed{5}$ Déduire des relations précédentes que, pour tout $i \geqslant 1$, 3 ne divise pas l'entier b_i.

$\boxed{6}$ Conclure.