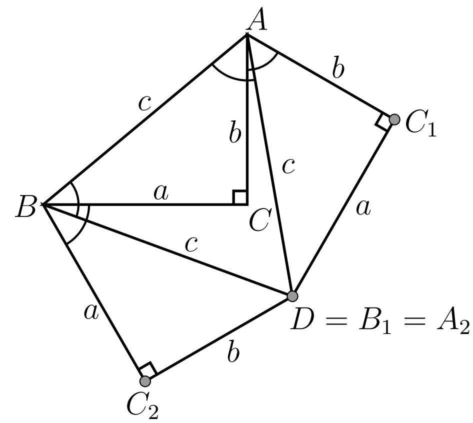
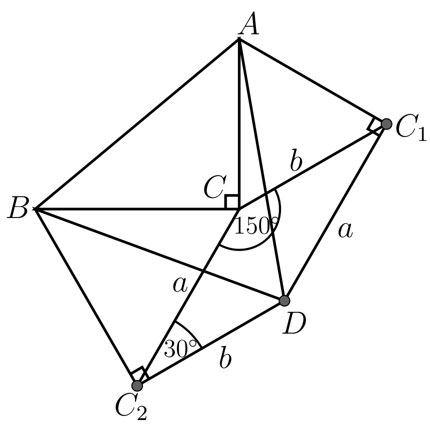
Soient $A, B, C$ les sommets du triangle, avec un angle droit en $C$. Faisons une rotation de $60^{\text{o}}$ centrée en $A$ dans le sense antihoraire, et une autre de $60^{\text{o}}$ centrée en $B$ dans le sense horaire, comme dans la figure à droite. Notons $C_1, B_1$ et $C_2, A_2$ les images des sommets que l'on obtient de $A, B$ et $C$. Remarquons que $\overline{BA_2} = c = \overline{AB_1}$ et $\angle ABA_2 = \angle BAB_1 = 60^{\text{o}}$. Donc, $A_2$ et $B_1$ coincident ; si l'on note $D$ ce point, alors $A, B$ et $D$ ce sont les sommets d'un triangle équilatéral de coté $c$.



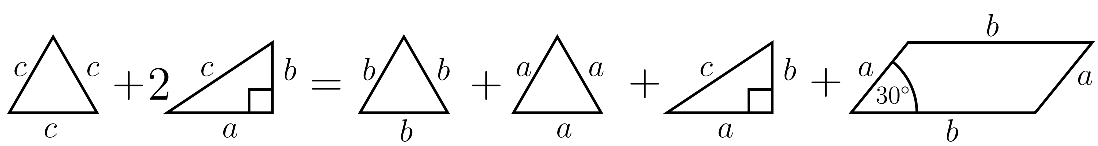




Notons que $BCC_2$ et $ACC_1$ sont des triangles équilatéraux de cotés $a$ et $b$ respectivement. De plus, $BC_2D$ et $AC_1D$ sont tous les deux congrus au triangle $BCA$.

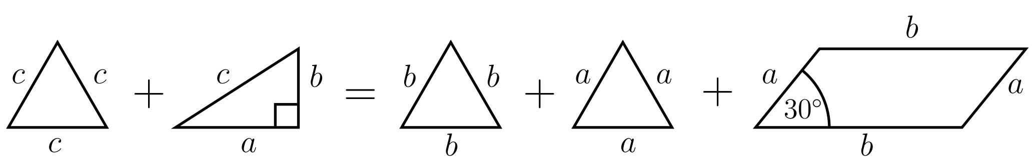
Au niveau d'aires, nous avons

$$ABC_2DC_1 = ABD + BC_2D + AC_1D = ACC_1 + BCC_2 + BCA + C_2DC_1C.$$

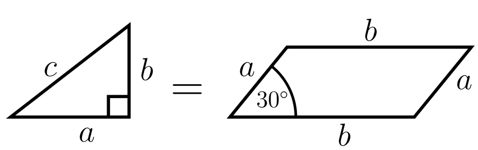
En dessins,



ce qui nous donne



Nous avons donc réduit notre preuve à montrer que



Pour ce faire, notons que $C_2DC_1C$ est un parallelogramme de cotés $a$ et $b$. De plus, puisque $\angle BCA = 90^o$, l'angle $\angle C_1CC_2$ doit être égal à $150^o$, et donc

$$\angle CC_2D = \angle DC_1C = 30^o.$$

Si l'on utilise un peu de trigonométrie on obtient rapidement

$$\text{aire}(C_1CC_2D) = ab\,\text{sen}(30^o) = \frac{1}{2}ab = \text{aire}(BCA).$$

Cependant, on peut éviter cet argument si l'on remarque la figure ci-dessous, où le triangle à gauche est la moitié d'un triangle équilatéral, ce qui entraîne que l'hauteur du parallelogramme est ágale à $a/2$.