

## Géométrie des rencontres

par Alexandre Moatti

Ingénieur en chef des mines, docteur en histoire des sciences  
Chercheur associé à l'Université Paris-VII Denis-Diderot (SPHERE UMR 7219)

« Sur la théorie des moments considérés comme analyse des rencontres de lignes droites » : tel est le titre de l'article de 1835 de Coriolis. Sommes-nous de nos jours encore capables de comprendre un tel titre ? Et peut-on encore comprendre la théorie des moments appliquée à la géométrie ?

J'avoue pour ma part y avoir eu une certaine difficulté, à l'occasion de travaux sur l'œuvre de Coriolis. Et je ne suis pas certain d'y être totalement arrivé dans le présent article... Il est d'ailleurs rare qu'un mathématicien (je précise que je n'en suis pas un), ou qu'un scientifique en général, avoue tâtonner sur le sujet qu'il traite – un vulgarisateur, censé partager des résultats bien connus et plusieurs fois démontrés, le fera plus rarement encore. Et pourtant : c'est bien le cas ici. Aussi vous proposé-je de transformer ce talon d'Achille (généralement tenu secret, on l'a dit) en un atout dans notre démarche commune, la mienne à l'écriture de cet article, la vôtre à sa lecture.

L'enjeu pour vous et moi sera de comprendre ces deux articles (1819 et 1835), si concis et si singuliers de Coriolis, à la lumière des méthodes et des notations modernes – celles-ci sont là pour nous rassurer, pour nous conforter dans l'idée que nous avons bien compris sinon démontré le résultat. Le texte de 1835 ne fait appel qu'à des projections géométriques : il n'utilise pas de coordonnées cartésiennes – Coriolis considère qu'elles sont foncièrement réductrices de la notion de *droite*. Je n'en utiliserai pas non plus... en revanche j'utiliserai l'algèbre vectorielle, bien utile pour la notion de moments – que Coriolis n'utilise pas, cette fois-ci pour cause puisqu'elle n'existait pas de son temps !

### Mais qui était donc Coriolis ?

Une célébrité quasi universelle, liée à la force à laquelle il a donné son nom. Un personnage pourtant quasi anonyme, ainsi qu'une œuvre et une carrière scientifiques méconnues. Qui était donc Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) ?

Il est l'aîné de la branche moins fortunée d'une ancienne famille aristocratique française (parlement de Provence). Après la tourmente

révolutionnaire (son père était capitaine aux Gardes du Roi jusqu'en 1792), la famille s'exile à Nancy, et Coriolis intègre l'École polytechnique en 1808, puis celle des Ponts et Chaussées.



Assez peu intéressé par la carrière d'ingénieur des Ponts et Chaussées, il devient début 1817 répétiteur d'analyse à l'École polytechnique (cours d'Augustin Cauchy). Il y passera toute sa vie, répétiteur de ce cours jusqu'en 1838, date à laquelle il devient directeur des études dans cette École, poste qu'il conserve jusqu'à sa mort en 1843. Il est aussi professeur à l'École des ponts et chaussées et à l'École centrale (créée en 1829).

Mais son sujet d'intérêt principal est la mécanique, et notamment « la théorie des machines », à laquelle il consacre un traité magistral en 1829. Il y formalise la notion de *travail*, notion toujours en vigueur à l'heure actuelle. En 1831 et 1835, il étudie les équations du mouvement relatif et en tire les notions de *force d'entraînement* et de *force centrifuge composée* (plus tard : force de Coriolis). La même année, 1835, il publie une *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*, ouvrage qui reste de référence.

Membre de l'Académie des sciences en 1836, il est pris, lorsqu'il devient directeur des études à Polytechnique à partir de 1838, dans des luttes d'influence qui lui pèsent. Il regrette de ne plus pouvoir se consacrer à la science (il avait abandonné, pour des raisons déontologiques, toutes ses charges de professorat).

De santé fragile, miné par ces querelles académiques et politiques, il s'éteint en 1843, à cinquante et un ans, sans doute de la tuberculose qu'il avait contractée jeune.

## LA « GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE »

Donnons d'abord le sujet brut (tel qu'il apparaît dans l'article de 1819) – on pourrait même dire dans toute sa brutalité.

*Théorèmes appartenant à la géométrie de la règle.*

I. **S**OIENT pris arbitrairement, soit sur un plan, soit dans l'espace,  $n$  points que l'on numérotera et désignera par  $(1), (2), (3) \dots (n)$ .

Soit joint chacun de ces points à celui qui porte le numéro immédiatement supérieur par  $n-1$  droites indéfinies, dont chacune soit désignée par les deux points qui la déterminent en cette manière :  $\overline{(1)(2)}, \overline{(2)(3)}, \overline{(3)(4)}, \dots, \overline{(n-1)(n)}$ .

Sur la direction de chacune de ces droites, soit pris arbitrairement un point; et soit désigné chacun des  $n-1$  points ainsi choisis par les numéros qui désignent la droite sur laquelle il se trouve situé; ainsi qu'il suit :  $(12), (23), (34), \dots (n-1, n)$ .

Soient joints deux à deux, par des droites, ceux de ces points et des premiers dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces droites par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette manière  $\overline{(1)(23)}, \overline{(12)(3)}, \overline{(2)(34)}, \overline{(23)(4)} \dots$ ; les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres se couperont en un certain point que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection de  $\overline{(1)(23)}$  avec  $\overline{(12)(3)}$  sera désignée par  $(123)$ ; celle de  $\overline{(2)(34)}$  avec  $\overline{(23)(4)}$  le sera par  $(234)$ ; et ainsi de suite; et ces nouveaux points seront un nombre de  $n-2$ .

Soient de même joints deux à deux, par des droites, ceux des points de ces trois séries dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre, ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces nouvelles droites par

l'ensemble des indices des deux points qui auront servi à les déterminer en cette manière  $\overline{(1)(234)}$ ,  $\overline{(12)(34)}$ ,  $\overline{(123)(4)}$ ,  $\overline{(2)(345)}$ ,  $\overline{(23)(45)}$ ,  $\overline{(234)(5)}$ , .....; il arrivera que les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquelles seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, se couperont en un même point, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection des trois droites  $\overline{(1)(234)}$ ,  $\overline{(12)(34)}$ ,  $\overline{(123)(4)}$  sera simplement désignée par  $(1234)$ , et ainsi des autres; ils seront au nombre de  $n-3$ .

En continuant le même procédé, on obtiendra des points, au nombre de  $n-4$ , dont l'indice portera cinq nombres, et qui seront les points de concours de quatre droites; puis des points au nombre de  $n-5$ , dont l'indice portera six nombres, et qui seront des points de concours de cinq droites, et ainsi de suite; et enfin, un point unique qui sera le point de concours de  $n-1$  droites, et sera désigné par  $(123....n)$ .

Il s'agit d'une « question proposée » aux lecteurs, en 1819, dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Ce n'est pas un article, c'est un exercice, un problème – un peu comme ces devinettes et jeux mathématiques de nos journaux contemporains.

Comme l'indique son titre, il se rapporte « à la géométrie de la règle ». Qu'est cela ? De nos jours, on a du mal à comprendre ces classifications et surtout l'intérêt qu'avaient les mathématiciens jusqu'à assez tard au XIX<sup>e</sup> siècle pour ces constructions à la règle, à la règle et au compas... C'était une autre vision des nombres, d'avant la théorie des nombres. On construisait ceux-ci à la règle et au compas, et on obtenait assez (tauto-)logiquement des nombres... constructibles<sup>1</sup>, qui constituent une petite partie des nombres algébriques (solutions réelles de polynômes à coefficients entiers). La « géométrie de la règle », à laquelle se rapporte le sujet proposé de 1819, est plus réductrice encore : elle n'utilise que la règle, pas le compas – elle ne s'autorise pas le recours à la notion de distance (prise entre les pointes du compas et rapportée à un autre endroit), elle ne s'occupe que de directions, de rectilinéarité.

1. Le théorème de Wantzel (1837) démontre qu'un nombre constructible est solution d'un polynôme de degré 2<sup>n</sup>. On peut le considérer comme un premier jalon de la théorie des nombres.

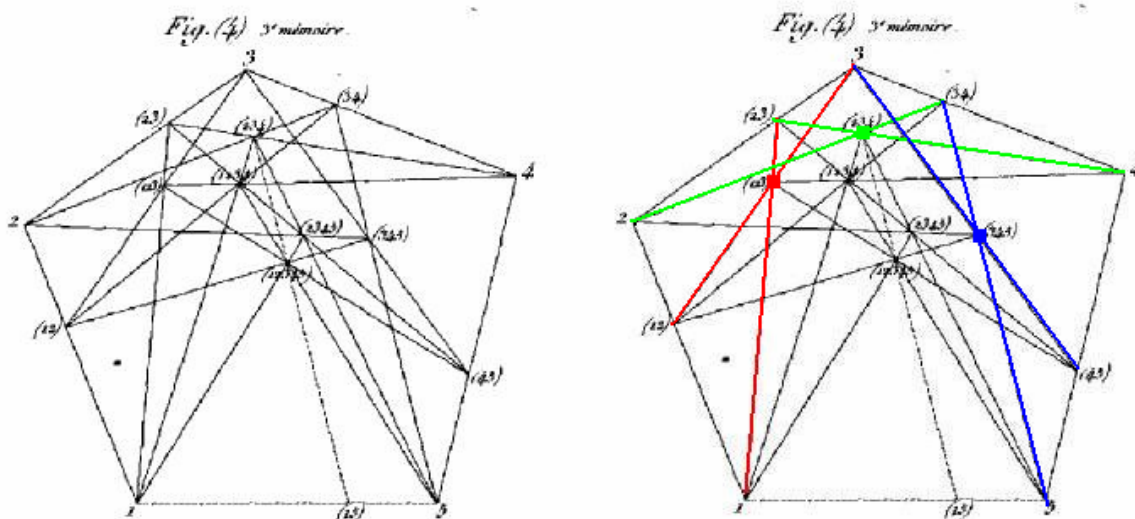
## UNE RÉOLUTION GRAPHIQUE

Le mémoire de 1835 est nettement moins elliptique que la « question proposée » de 1819. 1835, c'est l'*annus mirabilis* de Coriolis, celui de la publication du « second théorème<sup>2</sup> » (force de Coriolis), celui de la publication de son magistral ouvrage *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*. Dans ce volume XV du *Journal de l'École polytechnique*, où il travaille comme répétiteur depuis 1817, quatre articles successifs de Coriolis paraissent, dont le « second théorème », et ce texte sur la théorie des moments.

Mais examinons sans plus tarder les constructions géométriques faites par Coriolis dans cet article, qui nous aideront à comprendre son résultat.

*Si l'on conçoit dans l'espace (fig. 4) une suite de  $n$  points auxquels on donne les numéros de (1) à ( $n$ ) ; si l'on joint ces points deux à deux dans l'ordre des numéros pour en faire un polygone [...] Si sur chaque côté ou sur son prolongement on prend comme on voudra un point, et qu'on le désigne par la réunion des numéros des points par où passe la droite sur laquelle il est pris, c'est-à-dire par (12), (23), (34), etc.*

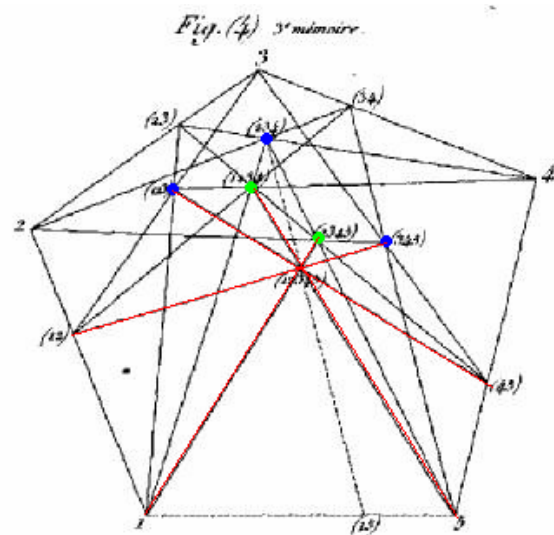
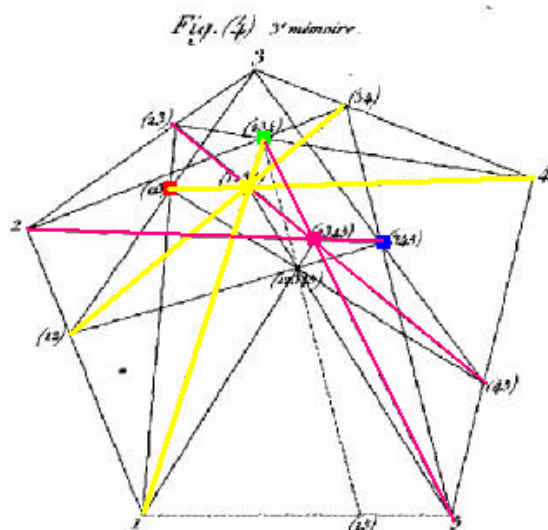
Coriolis choisit donc  $n$  points (appelons-les de *première génération*) sur chacune des droites formant les côtés du polygone. Regardons cela avec l'exemple  $n=5$  dans le plan illustré par Coriolis dans son article de 1835 :



**Figures 1 et 1bis : figure (4) de Coriolis, dupliquée par nous, premières étapes.**

**(à g.)** On choisit 5 points numérotés de 1 à 5, et sur chacun des côtés, cinq autres points notés (12), sur le côté reliant 1 à 2, (23), etc. ; **(à dr.)** on relie les points 1 à (23), et (12) à 3 – ces deux droites rouges nous donnent un point rouge noté (123) ; on relie 2 à (34) et (23) à 4 – ces deux droites vertes nous donnent un point vert noté (234) ; on relie 3 à (45) et (34) à 5 – ces deux droites bleues nous donnent un point bleu noté (345).

2. « Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps », voir analyse de ce texte de Coriolis par A. Moatti, [BibNum](#), octobre 2011.



**Figures 1ter et 1quater : figure (4) de Coriolis, dupliquée par nous, étapes suivantes. (à g.)** On a reporté les points rouge, vert, bleu de la figure précédente. On relie (lignes jaunes) le point rouge (123) à 4, le point 1 au point vert (234), enfin les points (12) et (34) : ces trois droites jaunes sont concourantes en un point jaune noté (1234). On relie (lignes roses) le point vert (234) à 5, le point 2 au point bleu (345), enfin les points (23) et (45) : ces trois droites roses sont concourantes en un point rose noté (2345) ; **(à dr.)** étape finale pour 5 points, figure de Coriolis – attention on a changé les couleurs des points : les points de troisième génération (123), (234) et (345) figurent en bleu, et les points de quatrième génération (1234) et (2345) figurent en vert. On relie alors le point 1 au point vert (2345), le point (12) au point bleu (345), le point bleu (123) au point (45), le point vert (1234) au point 5 : ces quatre droites rouges sont concourantes en un point rouge noté (12345).

En partant de  $n$  points, on arrive à la concourance en un point de  $(n-1)$  droites. Voici donc le théorème visualisé à défaut d'être démontré : mais, à mon sens, cette visualisation est une précieuse assistance à la démonstration que nous tâchons d'esquisser ci-après – pour faire cette démonstration (mon rôle) comme pour la comprendre (votre rôle).

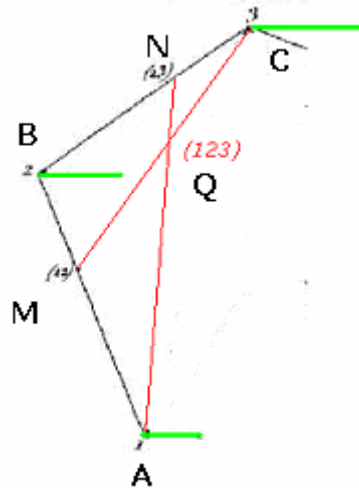
### SUIVONS LA DÉMONSTRATION DE CORIOLIS

Coriolis semble démontrer son résultat en une phrase, comme si c'était évident :

*Si l'on regarde les points de la première série comme des points d'application de forces parallèles dont les rapports de grandeurs soient tels que chaque point de la seconde série soit le point d'application de la résultante des deux forces répondant aux deux numéros successifs de la première série, c'est-à-dire aux extrémités du côté sur lequel se trouve ce point de la seconde série ; il est clair que chacune des deuxième, troisième, quatrième séries de droites contiendra le centre des premières forces appliquées aux points portant les numéros qui sont contenus dans*

la réunion des indices des deux points par où elles passent : elles devront donc se rencontrer au centre unique de ces forces parallèles.

Essayons de suivre son raisonnement. D'abord, dans cette longue phrase, où interviennent donc les moments ? Ils interviennent, en fait, lorsque Coriolis parle du « rapport de grandeurs » entre forces. Explicitons cela :



**Figure 2**

On choisit au point A une force de direction quelconque et d'amplitude  $F_A$  arbitraire (en vert, figure 2). On applique alors au point B une force parallèle, telle que les moments en M s'équilibrent sur le segment AB :  $F_A \times AM = F_B \times MB$ <sup>3</sup> donc  $F_B = F_A \times AM/MB$  ; idem en N,  $F_B \times BN = F_C \times NC$  donc  $F_C = BN/NC \times F_B = BN/NC \times AM/MB \times F_A$ . Au point M s'applique<sup>4</sup> la résultante  $F_M = F_A + F_B$  ; au point N s'applique la résultante  $F_N = F_B + F_C$ .

La résultante entre  $F_A$  en A et  $F_N$  en N vaut  $F_A + F_N = F_A + F_B + F_C$  et s'applique au seul point Q du segment [AN] qui annule les moments sur le segment :  $F_A \times AQ = F_N \times QN$ . Mais ce même point Q a une propriété particulière, il annule aussi les moments sur le segment [MC], ce qu'on démontre dans l'encadré ci-dessous.

### « Théorème fondamental » du triangle

Avant de nous expliquer sur ce titre pompeux, égrenons nos formules :

$$F_A \wedge AM + F_B \wedge BM = 0 \text{ (définition de M)} \quad (1)$$

3. Comme les forces sont parallèles, on peut raisonner ici en vectoriel ( $F_A, AM$ ) comme en scalaire ( $F_A, AM$ ).

4. Dans ses *Éléments de statique* (1803), le mathématicien Louis Poinot a démontré que la résultante de deux forces parallèles, s'appliquant en A et B, s'appliquait en un point M situé sur le segment [A,B] vérifiant la relation des moments.

$$\mathbf{F}_B \wedge \mathbf{BN} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CN} = 0 \text{ (définition de N)} \quad (2)$$

$$(\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} = 0 \text{ (définition de Q)} \quad (3)$$

Calculons alors la somme de moments suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{AQ} + (\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C) \wedge \mathbf{NQ} &= \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{AM} + \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{NQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{NC} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \\ &= \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{MB} \text{ (1)} + \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{NQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{BN} \text{ (2)} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \\ &= \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_B \wedge (\mathbf{MB} + \mathbf{NQ} + \mathbf{BN}) + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \\ &= (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \\ &= \mathbf{0} \text{ (3)} \end{aligned}$$

En faisant (2) – (3) + (1), on peut obtenir plus rapidement ce même résultat :

$$\mathbf{F}_A \wedge \mathbf{AQ} + (\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C) \wedge \mathbf{NQ} = 0 \quad (4)$$

Donc le point Q annule aussi les moments sur [AN] – démontrons toutefois qu'il est bien sur ce segment. Petite subtilité ici, les forces **F** sont colinéaires donc proportionnelles à un vecteur de base **i** sur leur direction, et (4) nous donne alors la relation sans produit vectoriel :

$$\mathbf{F}_A \times \mathbf{AQ} + (\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C) \times \mathbf{NQ} = 0 \quad (4bis)$$

Cette relation est entre les vecteurs **AQ** et **NQ**, auxquels sont affectés des coefficients. Or, qu'est-ce qu'une relation entre deux vecteurs sinon (*a minima*) une relation de colinéarité ? Les trois points A, N, Q sont donc alignés. Le point Q, défini comme annulant les moments sur [MC], appartient aussi au segment [AN] où il annule aussi les moments.

On tirera enfin des trois premières une autre relation (5) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{AQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{BQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} &= \mathbf{F}_A \wedge (\mathbf{AM} + \mathbf{MQ}) + \mathbf{F}_B \wedge (\mathbf{BM} + \mathbf{MQ}) + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \\ &= \mathbf{F}_A \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{MQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} \quad (1) \\ &= \mathbf{0} \quad (3) \end{aligned}$$

Cette relation totalement symétrique en A, B et C montre que le point Q est le point d'application de la résultante **F<sub>A</sub> + F<sub>B</sub> + F<sub>C</sub>** et annule les moments de ces trois forces :

$$\mathbf{F}_A \wedge \mathbf{AQ} + \mathbf{F}_B \wedge \mathbf{BQ} + \mathbf{F}_C \wedge \mathbf{CQ} = \mathbf{0} \quad (5)$$

@@@@@@@

Nous ne faisons que retrouver ici un théorème de base de la géométrie du triangle – nous l'appelons fondamental par clin d'œil (théorème fondamental de l'algèbre, de l'arithmétique), mais aussi parce qu'il est fondamental dans notre sujet coriolisien. En transformant les produits vectoriels en relations entre vecteurs, comme ci-dessus (en posant simplement **F<sub>A</sub> = F<sub>A</sub> i**, etc. et en éliminant **i**), on retrouve la géométrie du triangle, avec les coefficients (scalaires cette fois-ci) **F<sub>A</sub>** en A, **F<sub>B</sub>** en B, **F<sub>C</sub>** en C. La relation (5) ci-dessus s'exprime alors :

$$\mathbf{F}_A \times \mathbf{AQ} + \mathbf{F}_B \times \mathbf{BQ} + \mathbf{F}_C \times \mathbf{CQ} = 0$$

C'est exactement la définition du barycentre : le point Q est barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs  $F_A$ ,  $F_B$  et  $F_C$  si et seulement si la relation ci-dessus est vérifiée. De la même manière, les relations (1) à (4) ci-dessus sont elles aussi l'expression de barycentres.

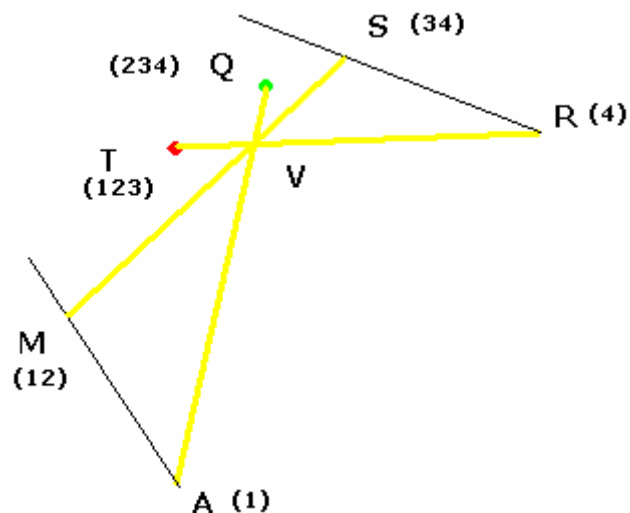
Ce même « théorème fondamental » du triangle s'énonce parfois ainsi : soit Q le barycentre de  $[(A, F_A), (B, F_B), (C, F_C)]$  | AQ rencontre BC en N si et seulement si  $F_B \times \mathbf{BN} + F_C \times \mathbf{CN} = 0$ .

Ce qui précède montre comment des calculs de moments – ou les recherches de barycentres, équivalentes<sup>5</sup> – nous amènent à des concourances de droites en ces barycentres. Si l'on reformule la phrase de Coriolis ci-dessus, avec ses notations : au point (1), on fixe une force de direction et d'amplitude arbitraires (cf. figure 2 ci-dessus); au point (2) on applique une force parallèle, d'amplitude donnée par la formule des moments par rapport au point (12); ainsi la résultante, somme des deux forces, a (12) pour point d'application (seul point du segment qui annule les moments) ; et ainsi de suite jusqu'au point (n). La résultante des forces en (1), (2) et (3) aura un et un seul point d'application, annulant les moments en (1), (2) et (3), ainsi qu'en (12) et (3), et en (1) et (23). Le raisonnement se répète dans la série de points successifs : à chaque fois le point d'application de la résultante, envisagé de plusieurs manières différentes, est le point de concours d'un certain nombre de droites. On a ainsi  $(n - 2)$  points où se croisent deux droites,  $(n - 3)$  points où se croisent trois droites,  $(n - p)$  points où se croisent  $p$  droites, et finalement 1 point où se croisent  $(n - 1)$  droites. La phrase de Coriolis est d'une grande économie de mots, mais même s'il est synthétique on peut suivre son raisonnement.

Le lecteur, pour s'en convaincre (j'aime bien ce genre de phrase, suivie généralement d'un futur), pourra étudier la configuration suivante et sa légende (les trois droites jaunes sont issues de la figure 1ter ci-avant).

---

5. Avec la convention posée par Coriolis de prendre en chaque point des forces de même direction (peu importe cette direction). En prenant des forces et non de simples pesons, Coriolis n'est pas très éloigné de la notion de produit vectoriel.



**Figure 3 :** (issue de figure 1<sup>er</sup> ci-dessus) (Les points A, M, Q sont les mêmes que dans la figure 2, et le point S figure comme point (34) dans les figures 1). Traçons le segment MS, et définissons le point V comme celui qui annule les moments sur ce segment. Par des calculs analogues à ceux de l'encadré ci-dessus, s'agissant du même jeu de forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , on démontre que V est aussi le point qui annule les moments sur RT, et qu'il est sur ce segment ; que V est aussi le point qui annule les moments sur AQ, et qu'il est sur ce segment. Les trois droites concourent donc en V, qui est appelé (1234) par Coriolis.

### AVANT CORIOLIS, CEVA ET D'AUTRES

Coriolis résout le sujet de manière originale – il semble que personne ne l'ait fait ainsi avant lui. Cependant, nous l'avons vu, la résolution par les moments diffère peu de la résolution par les barycentres, en affectant un coefficient à chaque sommet d'un polygone. Un certain nombre d'auteurs affectaient (virtuellement, on imagine) un peson différent à chaque sommet d'une figure. Coriolis reconnaît une antériorité à cette méthode quand il écrit en note de bas de page :

*M. Olivier [...] vient de me montrer un traité publié en 1678 par Jean Céva, sous le titre de De rectis lineis invicem secantibus statica constructio. On voit par le titre<sup>6</sup> même que cet ouvrage contient l'idée de ce petit Mémoire.*

Il faut dire que l'ouvrage, écrit en latin, n'est pas d'un accès facile et on comprend que Coriolis ait pu ne pas le connaître (et inversement l'on s'étonne qu'Olivier le connût). En témoigne ce type d'extrait de l'ouvrage de Ceva, quasi

6. Coriolis ne juge pas bon de le traduire : à l'époque tout le monde comprenait ce titre, qu'on pourrait traduire « À propos d'une construction par la statique de droites mutuellement sécantes ».

illisible de nos jours sauf par de grands latinistes (ce que ne sont en général pas les mathématiciens contemporains) :

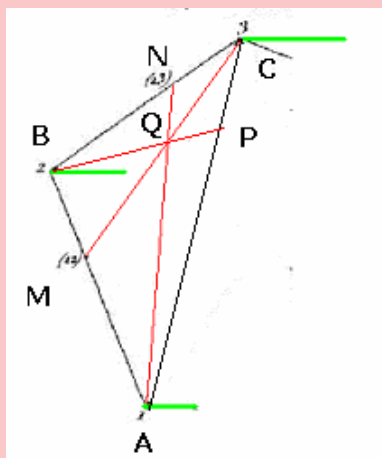
### PROP. I. PROB. I. ELEMENTVM I.

*Sint duæ rectæ E A, C A, conuenientes in A, quibus occurrant duæ alia C D, E B, in D B punctis, quæ se inuicem ferent in F. Propositum nobis sit ex punctis E C A grania I H G in ea ratione suspendere, ut pondus G ad H eandem habeat rationem, quam C B ad B A; idem verò G ad I, cam quam E D ad D A; pondus verò I ad duo H G illam, quam habet B F ad F E, & grane H ad duo grania I G fit, ut D F ad F C.*

Même au temps de Coriolis, 150 ans après la parution de ce traité en latin, il n'est pas sûr que de nombreux mathématiciens aient pu le comprendre ; en tout cas Théodore Olivier<sup>7</sup>, répétiteur à Polytechnique, le connaissait – quoique mathématicien moins brillant, il était sans doute plus érudit que Coriolis.

#### Théorème de Ceva

Mais si Giovanni Ceva, ou Jean Céva (1647-1734), reste connu, c'est parce qu'il a donné son nom à un théorème extrait de son ouvrage de 1678.



**Figure 4 (reprise de figures 2 et 3)**

Le théorème de Ceva dit que les trois droites sont concourantes (en Q) si et seulement si :

$$\frac{NB}{NC} \times \frac{PC}{PA} \times \frac{MA}{MB} = 1 \quad (6)$$

Démontrons-le dans un sens. On suppose la relation (6) valide. On affecte les poids  $\alpha$  en A,  $\beta = \alpha \times MA/MB$  en B,  $\gamma = \alpha \times PA/PC$ . Comme

7. Théodore Olivier (1793-1853), polytechnicien (X1811), était mathématicien, répétiteur à Polytechnique. Il fut un des fondateurs de l'École centrale en 1829, et par la suite (1839) professeur de géométrie descriptive au Conservatoire national des arts et métiers.

$\alpha \mathbf{MA} = \beta \mathbf{MB}$ , M est le barycentre de A ( $\alpha$ ) et B ( $\beta$ ) On a donc la relation vectorielle suivante :  $\alpha \mathbf{MA} + \beta \mathbf{MB} = 0$

En suivant le même raisonnement pour  $\alpha$  et  $\gamma$ , on a :  $\alpha \mathbf{PA} + \gamma \mathbf{PC} = 0$ .

On déduit de (6) que  $\beta \mathbf{NB} = \gamma \mathbf{NC}$ , donc :  $\beta \mathbf{NB} + \gamma \mathbf{NC} = 0$

On définit Q comme le barycentre des trois points :

$$\alpha \mathbf{QA} + \beta \mathbf{QB} + \gamma \mathbf{QC} = 0$$

$$\text{donc } \alpha \mathbf{QM} + \alpha \mathbf{MA} + \beta \mathbf{QM} + \beta \mathbf{MB} + \gamma \mathbf{QC} = 0$$

$$\text{donc } (\alpha + \beta) \mathbf{QM} + \gamma \mathbf{QC} = 0$$

Donc les trois points Q, M, C sont alignés (de même Q, N, A et Q, B, P) : donc les droites sont concourantes.

@@@@@@

Démontrons-le dans l'autre sens. Soit un point Q dans le triangle. On trace les « céviennes » issues de Q, c'est-à-dire les segments issus de chacun des sommets et passant par Q ; elles sont concourantes. On affecte des coefficients barycentriques  $\alpha^8$  en A,  $\beta = \alpha \text{ AM/BM}$  en B, et en C  $\gamma = \beta \text{ CN/BN}$ . On définit enfin un point Q' qui annule les moments sur [AN]. On a donc :

$$\alpha \mathbf{MA} + \beta \mathbf{MB} = 0$$

$$\beta \mathbf{NB} + \gamma \mathbf{NC} = 0$$

$$\alpha \mathbf{Q'A} + (\beta + \gamma) \mathbf{Q'N} = 0$$

On reconnaît les trois relations (1), (2), (3) de l'encadré ci-dessus. Avec le même calcul que ci-dessus (que l'on refait), on obtient :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \mathbf{Q'M} + \gamma \mathbf{Q'C} &= \alpha \mathbf{Q'A} + \alpha \mathbf{AM} + \beta \mathbf{Q'B} + \beta \mathbf{BM} + \gamma \mathbf{Q'C} \\ &= \alpha \mathbf{Q'A} + \beta \mathbf{Q'N} + \beta \mathbf{NB} + \gamma \mathbf{Q'N} + \gamma \mathbf{NC} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le point Q' est sur le segment [AN] par définition ; il est aussi sur le segment [MC] par la relation de colinéarité ci-dessus. Il est au croisement de ces deux segments et est donc confondu avec Q. On tire aussi :  $\alpha \mathbf{QA} + \beta \mathbf{QB} + \gamma \mathbf{QC} = \alpha \mathbf{QA} + \beta \mathbf{QN} + \beta \mathbf{NB} + \gamma \mathbf{QN} + \gamma \mathbf{NC} = 0$

Donc Q est bien le barycentre des trois points A ( $\alpha$ ), B ( $\beta$ ), C ( $\gamma$ ).

Soit maintenant P' le point barycentre sur [AC]  $\alpha \mathbf{P'A} + \gamma \mathbf{P'C} = 0$ .

Calculons la somme des moments suivante :

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{QB} + (\alpha + \gamma) \mathbf{QP'} &= \beta \mathbf{QB} + \alpha \mathbf{QA} + \alpha \mathbf{AP'} + \gamma \mathbf{QC} + \gamma \mathbf{CP'} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le point P' est sur le segment [QB] (colinéarité des vecteurs).

Comme il est aussi sur le segment [AC], c'est le point de rencontre de ces deux segments, donc P' = P. On a ici redémontré une variante du « théorème fondamental », à savoir que si Q est le barycentre, la droite BQ coupe AC en un point P tel que  $\alpha \mathbf{PA} + \gamma \mathbf{PC} = 0$ .

On en déduit alors facilement que les coefficients « font la ronde » :

$$\text{NB/NC} \times \text{PC/PA} \times \text{MA/MB} = \gamma/\beta \times \alpha/\gamma \times \beta/\alpha = 1$$

@@@@@@

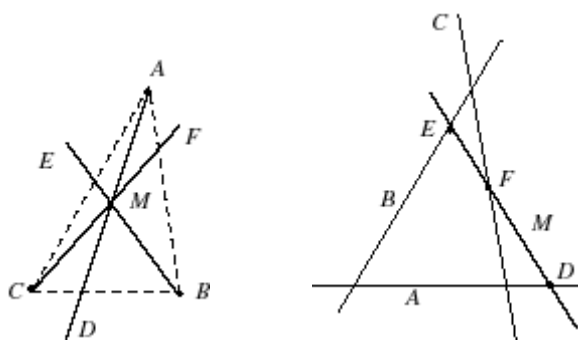
8. Le choix de  $\alpha$  est arbitraire puisqu'il y a proportionnalité des coefficients barycentriques.

On peut maintenant se demander quelle est l'utilité du théorème de Ceva – d'ailleurs quelle est l'utilité d'un théorème en général ? Disons que le théorème de Ceva permet de transformer un problème de concourance de droites en un problème de calcul de distances.

Il est un autre auteur qui avait travaillé sur ce sujet : il s'agit de Lazare Carnot (1753-1823), le mathématicien et général révolutionnaire, ministre de l'Intérieur des Cent-Jours. Coriolis emprunte aussi à la tradition de Carnot dans ses résultats de mécanique (en théorie des machines, sur la notion de travail par exemple) : bien que ces deux savants se ressemblent fort peu, on ne manque de remarquer le même intérêt qu'ils portent à des sujets fort analogues, en mécanique (théorie des machines) comme en géométrie (rencontre de droites et alignement de points). La notion de « transversale » chez Carnot<sup>9</sup> est *duale* de la notion de céviennne – elle conduit à des résultats analogues à ceux présentés par Coriolis. C'est pour nous l'occasion de poursuivre sur cette notion de *dualité* en géométrie projective.

### DUALITÉ EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DU TRIANGLE

La géométrie projective<sup>10</sup> *projette* un point du plan normal en une droite du plan projectif, et une droite du plan normal en un point du plan projectif. Le côté d'un triangle (droite) est projeté vers un de ses sommets (point), et les sommets d'un triangle (points) sont projetés vers des droites (côtés) – un triangle est sa propre projection, les côtés ayant été intervertis avec les sommets.



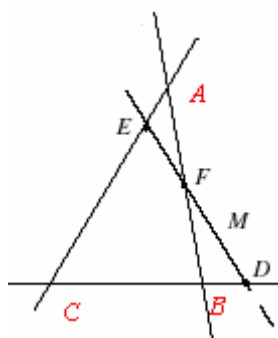
**Figure 5 : Triangle de sommets  $ABC$  (à g.), et sa projection en un triangle de cotés  $A, B, C$  (à dr.)**

9. Pour une étude de la conceptualisation de la notion de transversale chez Carnot : Karine Chemla, « Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Ménélaüs », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 163–190.

10. Comme l'écrit Serge Mehl ([Chronomath](http://Chronomath)), « la déferlante axiomatique de la période des mathématiques modernes a éliminé des programmes de mathématiques ces éléments fondamentaux de la géométrie projective ». Elle était enseignée dans les lycées jusqu'aux années 1970 – Mehl cite une référence de livre scolaire : *Géométrie, classe de Terminale C-E*, par Marcel Condamine, Coll. P. Vissio, Éd. Delagrave - 1971.

*Le sommet A (en haut à g.) devient une droite A (en bas à dr.). Le côté AB (à g.) devient un point à l'intersection des droites A et B (à dr.). La relation (à g.) « la droite céviennne D contient le point A » se transforme (à dr.) en « le point D appartient à la droite A ». Les deux autres céviennes E (resp. F) (à g.) se transforment en deux points E (resp. F) (à dr.) situés sur B (resp. C). La relation (à g.) « les trois droites céviennes E, D, F concourent en un point M » se transforme (à dr.) en « les trois points D, E, F sont alignés sur une droite, la transformée de M ».*

Cette correspondance projective conduit au théorème de Ménélaüs<sup>11</sup>, dual du théorème de Ceva. Soit un triangle (à dr.), coupé par une « transversale » – c'est-à-dire par une droite coupant ses trois côtés en D, E, et F :



**Figure 9 :** Figure 6 à dr. dans laquelle A, B, C redeviennent les sommets du triangle (marqués en rouge).

On a alors la relation suivante :

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

C'est réciproquement une condition nécessaire et suffisante d'alignement : soient trois points D (sur BC), E (sur AC), F (sur AB) – ils sont alignés si et seulement si la condition ci-dessus est vérifiée. Cette condition peut être démontrée par les moments, comme nous l'avons fait pour celle de Ceva.

### UNE THÉORIE... AUSSI TRÈS PRATIQUE

Finalement, quel est l'apport de Coriolis sur ce sujet connu depuis l'Antiquité (pour le problème de Ménélaüs), développé par Ceva au XVII<sup>e</sup> siècle, et repris par Carnot trente ans avant Coriolis ? Ces résultats sont, on l'a vu, très similaires ; mais Coriolis donne des démonstrations concises, fondées sur la théorie des moments, et il généralise les résultats de Ceva sur le triangle (donc plan) à un polygone à  $n$  côtés, non nécessairement plan (tout ce qu'il propose s'applique à un polygone gauche). Il ne faut donc pas sous-estimer la vision de

11. Du nom du mathématicien Ménélaüs d'Alexandrie (70-140).

ce dernier sur ce sujet qui l'amuse toute sa vie, et son approche m'a pour ma part amusé – j'espère que ce fut votre cas aussi.

À signaler que, de manière tout à fait étonnante, Coriolis ne se contente pas des neuf théorèmes de son article : il donne une application fort pratique du premier théorème (celui de la concourance des droites), destinée à tester l'aptitude d'un dessinateur à tracer des lignes :

*Ce théorème, quand on l'applique à des points sur un plan, donne un moyen commode de vérifier l'exactitude que met un dessinateur au trait à tracer des lignes et à marquer leur rencontre ; si toutefois il ne connaît pas l'énoncé ci-dessus. Pour cela on lui posera les points de la première série, puis on lui prescrira de les joindre [...] Alors il se trouvera plusieurs des droites qu'il aura tirées qui devront se rencontrer au même point, s'il les a bien tracées et s'il a marqué avec précision les points de rencontre. C'est donc ce qu'on reconnaîtra d'un coup d'œil.*

Cette incise montre la vision fort opérationnelle des questions de géométrie ou de mécanique qu'avait Coriolis. Caractéristique de l' « ingénieur-savant », sa démarche vers l'amont (appliquer des principes de mécanique à la géométrie) se double d'une inventivité à l'aval : de la géométrie à la « mécanique appliquée », ici le dessin « industriel », auquel se rapporte cette incise.



(novembre 2013)  
(publié concomitamment sur Images des Maths sur [BibNum](#), en une version plus longue)