

Jeu D

Sur la table se trouvent deux tas de 9 cailloux chacun.

Deux joueurs jouent.

Chaque joueur, l'un après l'autre, prend 1 ou 2 cailloux

- ou bien dans un seul tas
- ou bien dans chacun des deux tas mais autant dans chaque tas (2 ou 4 cailloux en tout)

Celui qui prend le dernier caillou gagne.

- **Comment gagner à coup sûr ?**

Il suffit d'être le second joueur et de prendre le complément à 3 du nombre de cailloux que vient de prendre l'adversaire et dans le même tas que lui : autrement dit,

- (a) si le premier joueur vient de prendre 1 caillou dans un tas alors le second joueur prendra 2 cailloux dans ce même tas
- (b) si le premier joueur vient de prendre 2 cailloux dans un tas alors le second joueur prendra 1 caillou dans ce même tas
- (c) si le premier joueur vient de prendre 1 caillou dans chaque tas alors le second joueur prendra 2 cailloux dans chaque tas
- (d) si le premier joueur vient de prendre 2 cailloux dans chaque tas alors le second joueur prendra 1 caillou dans chaque tas

- **Pourquoi la stratégie fait gagner à coup sûr ?**

En appliquant la stratégie décrite ; juste après que les deux joueurs aient joué une fois chacun leur tour, il aura été retiré

- aucun caillou dans un tas et trois cailloux dans l'autre tas — dans les cas (a) et (b) précédents —

ou bien

- trois cailloux dans chaque tas — dans les cas (c) et (d) précédents —

Dans tous les cas, le nombre de cailloux retirés à la suite de deux coups successifs (un coup du premier joueur puis un coup du second) est égal à 3 ou 6.

Un multiple de trois cailloux aura été retiré de l'ensemble des deux tas après que les deux joueurs aient joués chacun autant de fois ; autrement dit, après chaque coup du second joueur.

Comme au départ il y a 18 cailloux au total, après un certain nombre de coups (six exactement) du second joueur, les deux tas seront épuisés.

Un **invariant** dans ce jeu est le **reste** du nombre total de cailloux **dans la division (euclidienne) par 3**. Au départ, ce reste est égal à zéro puisque $18 = 3 \times 6 + 0$.

Ensuite, lorsque le premier joueur aura joué, et pris 1, 2 ou 4 cailloux, le nombre total de cailloux aura diminué d'autant donc jamais d'un multiple de 3 donc le premier joueur ne pourra pas rétablir l'équilibre de sorte que le reste du nombre total de cailloux dans la division par 3 soit égal à zéro (il ne pourra atteindre que des positions perdantes).

En revanche, le second joueur, en appliquant sa stratégie, rétablira toujours la valeur de ce reste à zéro.

Remarque :

Dans la stratégie gagnante, le fait d'indiquer au deuxième joueur de prendre dans le même tas que celui dans lequel vient de prendre son adversaire n'est pas nécessaire. Il suffit qu'il prenne le bon nombre (le complément à 3 du nombre de caillou(x) pris juste avant par son adversaire) de cailloux dans l'un quelconque des deux tas ; pourvu qu'il y ait suffisamment de cailloux dedans ! Imposer de choisir le même tas permet d'en être certain mais il est plus rusé, lorsque c'est possible, de changer de tas pour rendre plus difficile la « lecture » de la stratégie gagnante par l'adversaire.

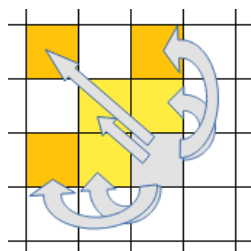
- **Analogie avec un autre jeu**

Une *Pion* d'un damier fictif (vide, par ailleurs) est placée en J10 (en bas à droite).

Deux joueurs, l'un après l'autre, déplacent le Pion de la manière suivante :

- ou bien d'une ou deux cases vers le haut
- ou bien d'une ou deux cases vers la gauche
- ou bien d'une ou deux cases vers le haut à gauche

Le premier des joueurs à atteindre la case A1 (en haut à gauche) est le gagnant.



Associions à chaque ligne un numéro égal au nombre de cailloux dans le premier tas. De même, associons le numéro de colonne au nombre de cailloux dans le deuxième tas.

Pour gagner, il suffit d'être le second joueur et de « ramener » le Pion sur une case dont les numéros de ligne et de colonne sont **tout deux des multiples de 3** (celles marquées d'un signe +, appelées positions gagnantes).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Tas 1
1	+			+			+			+	0
2			?			?			?		1
3		?			?			?			2
4	+			+			+			+	3
5			?			?			?		4
6		?			?			?			5
7	+			+			+			+	6
8			?			?			?		7
9		?			?			?			8
10	+			+			+			+	9
Tas 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

C'est toujours possible (pour le second joueur). Partant d'une case autre qu'une case +, le joueur peut toujours déplacer le Pion sur une case +. Ça n'est jamais possible pour le premier joueur car partant d'une case marquée d'un +, il ne peut déplacer le Pion sur une autre case + (partant d'une case +, aucune des flèches du schéma précédent ne mène à une autre case +). La position initiale (en J10) est perdante (car les numéros de lignes et de colonnes sont multiples de 3) , c'est donc bien le second joueur qui disposera d'une stratégie gagnante en jouant un coup dans une position gagnante.

Les points d'interrogation sont des positions gagnantes mais jamais atteintes (par le second joueur) dans la stratégie gagnante décrite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Tas 1
1											0
2											1
3											2
4											3
5											4
6											5
7											6
8											7
9											8
10											9
Tas 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Tas 1
1	+			+			+			+	0
2											1
3											2
4	+			+			+			+	3
5											4
6											5
7	+			+			+			+	6
8											7
9											8
10	+			+			+			+	9
Tas 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	