

Jeu C

Sur la table se trouvent un tas de 7 cailloux et un tas de 8 cailloux.

Deux joueurs jouent.

Chaque joueur, l'un après l'autre :

- Écarte définitivement l'un des deux tas
- et
- Sépare l'autre tas en deux tas (pas forcément égaux).

Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

- **Comment gagner à coup sûr ?**

Il suffit d'être le premier joueur et de prendre des cailloux de sorte qu'après en avoir pris, il reste un nombre **impair** de cailloux dans **chacun** des deux **tas**.

Au départ, les deux tas n'ont pas un nombre impair de cailloux (l'un est pair). Le premier joueur sépare le tas pair en deux tas impairs et écarte l'autre tas du jeu.

- **Pourquoi la stratégie fait gagner à coup sûr ?**

Le premier joueur peut établir l'équilibre de deux tas impairs en prenant, par exemple 1 caillou dans le tas de 8 cailloux. Le second joueur rompra à coup sûr l'équilibre car on ne peut pas séparer un tas impair en deux tas impairs puisque la somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair.

Un **invariant** dans ce jeu est constitué des parités du nombre de cailloux dans les deux tas. Ces parités s'obtiennent comme le **reste dans la division (euclidienne) par 2**. Le reste est égal à 0 ou 1.

Analogie avec un autre jeu

Une *Tour-Fou* d'un échiquier fictif (vide, par ailleurs) est placée en G8 (en bas à droite).

Deux joueurs, l'un après l'autre, déplacent la Tour-Fou de la manière suivante :

- ou bien verticalement jusqu'à la première ligne (celle des lettres A, B, ...) puis en diagonale (descendante)
- ou bien horizontalement jusqu'à la première colonne (celle des 1, 2, ...) puis en diagonale (montante)

Le premier des joueurs à atteindre la case A1 (en haut à gauche) est le gagnant.

Associons à chaque ligne un numéro égal au nombre de cailloux dans le premier tas. De même, associons le numéro de colonne au nombre de cailloux dans le deuxième tas.

Pour gagner, il suffit d'être le premier joueur et de « ramener » la Tour-Fou sur une case dont les numéros de ligne et de colonne sont tous les deux impairs (celles marquées d'un signe +, appelées positions gagnantes).

	A	B	C	D	E	F	G	Tas 1
0								0
1	+		+				+	1
2								2
3	+		+		+		+	3
4								4
5	+		+			+	+	5
6								6
7	+		+			+	+	7
8								8
Tas 2	0	1	2	3	4	5	6	7

C'est toujours possible (pour le premier joueur) comme on peut le voir, par exemple, sur la diagonale rouge clair qui contient bien des cases + ; ce qui correspond au partage du tas (pair) de 8 cailloux en deux tas impairs.

Ça n'est jamais possible pour le second joueur car partant d'une case marquée d'un +, il ne peut déplacer la Tour-Fou sur une autre case + (c'est le cas du tas de 7 cailloux dont le partage est associé à la diagonale verte qui ne contient pas de +).

La position initiale (en G8) est perdante (car 8 est pair), c'est donc bien le premier joueur qui disposera d'une stratégie gagnante en jouant un coup dans une position gagnante.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

	A	B	C	D	E	F	G	Tas 1
0								0
1	+		+		+		+	1
2								2
3	+		+		+		+	3
4								4
5	+		+		+		+	5
6								6
7	+		+		+		+	7
8								8
Tas 2	0	1	2	3	4	5	6	7