Mettons a, b, c, d en première ligne et notons $x_i, y_i, z_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, les autres entrées du carré comme ci-dessous :

a	b	c	d
x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	y_2	y_3	y_4
z_1	z_2	z_3	z_4

Remarquons que :
– de $a + x_1 + y_1 + z_1 = S$ on obtient $y_1 + z_1 = S - (a + x_1)$,
– de $a + b + z_1 + z_2 = S$ on obtient $z_1 + z_2 = S - (a + b) = c + d$,
– de $c + x_4 + y_1 + z_2 = S$ on obtient $y_1 + z_2 = S - (c + x_4)$.
Par suite,

$$2\,y_1 = (y_1{+}z_1){+}(y_1{+}z_2){-}(z_1{+}z_2) = S{-}(a{+}x_1){+}S{-}(c{+}x_4){-}(c{+}d) = 2\,S{-}a{-}2\,c{-}d{-}x_1{-}x_4,$$

c'est-à-dire,

$$y_1 = S - c - \frac{a + d + x_1 + x_4}{2}.$$

Ceci entraîne que z_1 et z_2 sont, respectivement, égaux à

$$z_1 = S - (a + x_1) - y_1 = S - (a + x_1) - S + c + \frac{a + d + x_1 + x_4}{2} = c - \frac{a - d + x_1 - x_4}{2},$$

$$z_2 = c + d - z_1 = c + d - c + \frac{a - d + x_1 - x_4}{2} = d + \frac{a - d + x_1 - x_4}{2}.$$

D'autre part, de $a + b + x_1 + x_2 = S$ on obtient

$$x_2 = S - (a + b) - x_1 = c + d - x_1,$$

et ceci avec $b + x_2 + y_2 + z_2 = S$ implique

$$y_2 = S - b - x_2 - z_2 = S - b - (c + d - x_1) - \left(d + \frac{a - d + x_1 - x_4}{2}\right) = \frac{a - d + x_1 + x_4}{2}.$$

D'une manière analogue (ou par simple symétrie), on obtient

$$y_4 = S - b - \frac{a + d + x_1 + x_4}{2}, \quad z_4 = b - \frac{a - d + x_4 - x_1}{2}, \quad z_3 = a + \frac{d - a + x_4 - x_1}{2},$$

$$x_3 = a + b - x_4 \qquad \text{et} \qquad y_3 = \frac{d - a + x_1 - x_4}{2}.$$

Étant données ces expressions, il devient naturel d'écrire x_1 et x_4 de la forme $d + s$ et $a + t$, respectivement. Plus précisement, on définit s et t en faisant $s = x_1 - d$ et $t = x_4 - a$. Nous avons alors :

$$y_1 = S{-}c{-}\frac{a + d + x_1 + x_4}{2} = S{-}c{-}\frac{a + d + (d + s) + (a + t)}{2} = S{-}c{-}a{-}d{-}\frac{s + t}{2} = b{-}\frac{s + t}{2},$$

$$z_1 = c - \frac{a-d+x_1-x_4}{2} = c - \frac{a-d+(d+s)-(a+t)}{2} = c - \frac{s-t}{2},$$
$$z_2 = d + \frac{a-d+x_1-x_4}{2} = d + \frac{a-d+(d+s)-(a+t)}{2} = d + \frac{s-t}{2},$$

$$x_2 = c+d-x_1 = c+d-(d+s) = c-s,$$

$$y_2 = \frac{a-d+x_1+x_4}{2} = \frac{a-d+(d+s)+(a+t)}{2} = a + \frac{s+t}{2}.$$

On obtient les valeurs de y_4, z_4, z_3, x_3 et y_3 d'une manière entièrement analogue. Le tableau devient alors :

a	b	c	d
$d+s$	$c-s$	$b-t$	$a+t$
$b-\frac{s+t}{2}$	$a+\frac{s+t}{2}$	$d+\frac{s+t}{2}$	$c-\frac{s+t}{2}$
$c-\frac{s-t}{2}$	$d+\frac{s-t}{2}$	$a+\frac{t-s}{2}$	$b-\frac{t-s}{2}$

.

Finalement, si l'on définit

$$m = \frac{s+t}{2} \qquad \text{et} \qquad n = \frac{s-t}{2},$$

alors $s = m+n$ et $t = m-n$, et le carré prends la forme annoncé.