Soit S la somme

$x+y+z=u+v+w=p+q+r=x+u+p=y+v+q=z+w+r=x+v+r=z+v+p.$

Notons d'abord que

$$\begin{aligned} 4\,S &= (x+v+r)+(z+v+p)+(y+v+q)+(u+v+w) \\ &= (x+y+z)+(u+v+w)+(p+q+r)+3\,v \\ &= 3\,S+3\,v. \end{aligned}$$

Par suite $S=3\,v$, donc $v=S/3$. Notons $\ell=v=S/3$, et soient m,n définis par $m=\ell-x$ et $n=\ell-z$, de sorte que

$$x=\ell-m \qquad \text{et} \qquad z=\ell-n.$$

Puisque $x+y+z=S=3\,\ell$, on a $(\ell-m)+y+(\ell-n)=3\,\ell$. Donc,

$$y=\ell+(m+n).$$

Par ailleurs, $3\,\ell=S=y+v+q=[\ell+(m+n)]+\ell+q$, donc

$$q=\ell-(m+n).$$

De plus, à partir de $3\,\ell=S=x+v+r=(\ell-m)+\ell+r$ on déduit

$$r=\ell+m,$$

et de $3\,\ell=S=z+v+p=(\ell-n)+\ell+p$ on déduit

$$p=\ell+n.$$

Finalment, de

$$3\,\ell=S=x+u+p=(\ell-m)+u+(\ell+n)$$

et

$$3\,\ell=S=z+w+r=(\ell-n)+w+(\ell+m),$$

on déduit

$$u=\ell+m-n \qquad \text{et} \qquad w=\ell-m+n.$$