Mouvements collectifs et auto-organisation *

Pierre Degond[1]

1-Department of Mathematics, Imperial College London,
London SW7 2AZ, United Kingdom
(en détachement du CNRS, Institut de Mathématiques de Toulouse)
email : pdegond@imperial.ac.uk

La nature nous offre de fascinants exemples de mouvements collectifs : essaims d'abeilles, nuées d'étourneaux, bancs de maquereaux. L'étude des phénomènes sociaux nous fournit également de nombreux exemples d'auto-organisation, comme la formation spontanée de files dans les foules de piétons circulant dans les centres commerciaux. Dans tous les cas, il s'agit de systèmes constitués d'un grand nombre d'agents autonomes, interagissant entre eux localement et n'ayant à leur disposition qu'une information partielle. Cependant, ces systèmes non-hiérarchisés sont capables de produire des structures ordonnées à grande échelle, c'est à dire sur des distances excédant largement la portée de perception des agents. Ainsi, le banc de maquereaux peut être constitué de millions d'individus et s'étendre sur des distances de plusieurs kilomètres. Il en est de même des piétons qui n'ont généralement qu'une perception limitée à leurs plus proches voisins et qui, par le seul fait de suivre la personne qui les précède, contribuent à l'émergence d'une circulation en file plus efficace (on parle d'intelligence des foules). Un autre exemple est fourni par les nids de termites ou plus généralement d'insectes sociaux (fourmis, guêpes, etc.). La taille des nids excède de plusieurs ordres de grandeur la taille des individus qui ont contribué à les construire. Leur structure est incroyablement complexe et obéit à des impératifs d'organisation sociale, régulation thermique, protection contre les attaques de prédateurs, etc. Pourtant, ils sont construits par des individus dont le système cognitif ne possède que quelques centaines de milliers de neurones et dont aucun n'a formé dans un quelconque ganglion neuronal le projet d'élaborer une structure aussi complexe. L'auto-organisation s'observe également à l'échelle microscopique, comme par exemple, lors de la migration collective des cellules d'un embryon au cours de l'embryogénèse, ou bien lors de la réponse d'un organisme adulte à l'apparition d'une lésion. L'auto-organisation n'est d'ailleurs pas l'apanage des êtres vivants ou des sociétés. Une expérience récente a montré la capacité de sphères de polymères mises en mouvement par un champ électrique à s'auto-organiser en un mouvement collectif [4].

*Les travaux évoqués dans cet article ont été réalisées en collaboration. Je tiens tout particulièrement à remercier C. Appert-Rolland, E. Carlen, J.-G. Liu, F. Plouraboué, G. Theraulaz, B. Wennberg et mes anciens étudiants A. Frouvelle, S. Motsch et L. Navoret, pour leurs contributions esssentielles.

Les structures à grande échelle qui apparaîssent dans les systèmes auto-organisés ne sont pas inscrites dans les règles d'interactions entre les individus. Ceux-ci en effet suivent des règles simples comme se suivre les uns les autres, s'orienter dans la même direction, etc. Les structures caractéristiques de l'auto-organisation émergent spontanément lorsqu'un grand nombre d'individus, chacun obéissant à des règles simples interagissent collectivement. On parle de phénomène d'émergence, ou plus simplement d'"émergence".

L'observation expérimentale semble confirmer que l'auto-organisation, loin d'être un "accident" rendu possible par l'apparition de la vie sur terre, est un phénomène extrêmement répandu et robuste. Ainsi, des molécules, précurseurs de l'ADN, ont-elles été retrouvées sur des astéroides et leur présence attribuée à des réactions chimiques favorisées par l'environnement traversé par ces astéroides [21]. L'auto-organisation apparaît à des échelles si différentes que l'on peut se demander si le destin ultime de l'univers est bien une marche vers le chaos ultime, telle que l'a décrite Boltzmann et formalisée dans le concept d'entropie. D'ailleurs, le concept de désordre lui-même est matière d'échelle. Il n'y a qu'à observer les formations nuageuses pour s'en convaincre. A l'échelle moléculaire, les composants de l'atmosphère sont décrits par une distribution gaussienne des vitesses qui est un maximum de l'entropie de Boltzmann. Cependant, à l'échelle d'un nuage, on constate bien une ségrégation des molécules, certaines se regroupant en gouttelettes. Et à plus grande échelle encore, il n'est pas rare d'observer des formations nuageuses extrêmement régulières, en bandes ou en damier par exemple. Le désordre serait donc un phénomène local et relatif qui alternerait avec l'ordre selon l'échelle considérée. Les concepts d'auto-organisation et celui d'entropie semblaient déjà difficiles à réconcilier pour le biologiste Jaques Monod, qui a consacré un chapitre de son essai 'Hasard et Nécessité' à une tentative de résolution de ce paradoxe [19].

Un autre concept caractérisant les systèmes auto-organisés est celui de transition de phase (selon la terminologie utilisée en physique; en théorie des systèmes dynamiques, on parlerait plutôt de bifurcation). En effet, le passage à l'état 'auto-organisé' peut se faire soudainement. Un exemple en est l'apparition des bouchons routiers sur une autoroute (un tel bouchon est l'exemple d'un phénomène auto-organisé non-désiré) : ceux-ci apparaissent soudainement sans qu'aucune cause apparente ne les ai provoqués (une des caractéristiques du phénomène d'émergence) et disparaissent tout aussi soudainement. En physique, les transitions de phase apparaissent lorsqu'on change certains paramètres du système, comme sa température par exemple : ainsi, l'ébullition, c'est à dire le passage de l'eau de l'état liquide à l'état vapeur se produit quand on la chauffe. Dans les systèmes auto-organisés, un analogue de la température est le niveau de bruit associé à la composante aléatoire du mouvement des agents. Ainsi, en trafic routier, la présence de conducteurs au comportement erratique peut induire la formation d'ondes de 'stop and go' dans un trafic dense mais sinon fluide. Le phénomène d'émergence, bien que spontané, peut donc etre amplifié par des conditions environnementales favorables.

Mais dans les systèmes auto-organisés, une autre variable induisant des transitions de phase est tout simplement la densité des individus. Un accroissement de densité est très souvent associé à un accroissement du niveau d'ordre dans le système. Par exemple, la formation spontanée de files de piétons n'apparaît que lorsque la densité est suffisamment importante. Pour des densités plus faibles, les obstacles constitués par les autres piétons ne sont pas suffisamment denses pour que des stratégies d'évitement cohérentes soient mises en place. Cet accroissement du niveau d'ordre avec la densité est un phénomène paradoxal et en contradiction avec ce qui est observé dans les systèmes physiques classiques où un accroissement de densité produit généralement un accroissement de température (ce que l'on peut constater par exemple en gonflant un pneu de vélo : après avoir servi, le corps de la pompe s'est échauffé). Pour quantifier le niveau d'ordre d'un système, on se sert d'un paramètre d'ordre, quantité variant entre 0 et 1, la valeur 0 étant associée au désordre total, et la quantité 1 à l'ordre total. Il est cependant parfois difficile de quantifier l'état d'un système à l'aide d'un seul paramètre d'ordre (par exemple, comment caractériser simplement l'ordre d'un réseau complexe. Différents quantificateurs ont été proposés mais aucun n'est associé de manière univoque à un type de structure particulier).

Lors d'une transition de phase, le système subit des variations importantes de ses propriétés, et notamment de son paramètre d'ordre, même si les variations de ses paramètres sous-jacents (densité, niveau de bruit) sont très faibles. Cet état caractéristique du passage du système d'une phase à l'autre est appelé état critique. L'état critique est souvent associé à des propriétés très particulières du système, notamment l'apparition de corrélations à grande distance. En effet, la manifestation d'une organisation se traduit par des propriétés similaires des agents (ce qu'on traduit par le concept de corrélation), même lorsque ceux-ci sont fortement distants les uns des autres. Un système à l'état critique possède la capacité de basculer dans une des deux phases qui le bordent en réponse à une variation extrêmement faible de ses paramètres sous-jacents. Cette propriété confère une forte adaptabilité aux systèmes critiques. De nombreux systèmes vivants semblent opérer dans un état critique, celui-ci ayant été favorisé lors de l'évolution car conférant une meilleure capacité de survie. Par exemple, les interactions entre individus au sein de groupes d'animaux grégaires (poissons, oiseaux, ongulés) permettent des transitions très rapides entre un état de repos où les liens entre les individus sont lâches et où chaque individu poursuit un but individuel (se nourrir par exemple) et un état d'alerte où les individus se regroupent pour résister plus facilement à l'attaque d'un prédateur. Des simulations informatique montrent que, en faisant varier les 'paramètres' de ces interactions par rapport aux valeurs 'naturelles' on déteriore la capacité du groupe à réagir efficacement à l'attaque du prédateur.

Dans les systèmes physiques, l'état critique apparaît uniquement pour certaines plages de paramètres bien choisies. Ainsi, à pression ambiante, il faut amener l'eau liquide à la température de 100° C pour que l'ébullition apparaisse. Dans les systèmes auto-organisés au contraire, l'état critique est un état extrêmement robuste : il apparaît pratiquement systématiquement, quelles que soient les conditions initiales du système. En termes de systèmes dynamiques, l'état critique est un attracteur. Ainsi, pour une densité de véhicules suffisante sur une portion d'autoroute donnée, les bouchons vont apparaître quelles que soient les conditions initiales du trafic. La présence d'états critiques attracteurs de la dynamique est appelée 'criticalité auto-organisée' [2]. C'est une branche importante de la physique et maintenant également des probabilités. Pour les systèmes exhibant de la criticalité auto-organisée, la présence de transitions de phases n'est pas un accident fortuit. C'est une circonstance banale dont il est indispensable de tenir compte dans les modèles.

Dans cette présentation succincte, de nombreux aspects ont été passés sous silence, comme par exemple, la distinction entre transitions de phase continues et discontinues, qui donne lieu à des scénarios de transition différents. De même, il conviendrait de documenter plus précisément un certain nombre des phénomènes décrits, notamment en relation avec les observations expérimentales. Nous renvoyons le lecteur interessé par ces questions à l'article de revue [24].

Et les mathématiques dans tout cela ? Bien entendu, elles sont susceptibles d'apparaître un peu partout mais nous allons nous restreindre aux problèmes de modélisation, c'est à dire à la description du système par le biais d'équations susceptibles de fournir une prédiction de l'état futur du système à partir d'informations présentes à l'état initial. Autrement dit, nous nous intéressons à formuler un problème de Cauchy pour un système d'équations differentielles ou aux dérivées partielles approprié. Il s'agit d'une approche complémentaire de celle de la physique statistique, qui vise avant tout à décrire et expliquer les propriétés génériques des systèmes. Il y a tout de même une parenté entre les deux approches, en ce que les systèmes étant par nature stochastique, nous rechercherons une trajectoire moyenne et éventuellement (mais on en est encore loin) des informations sur la répartition statistique des trajectoires autour de cette trajectoire moyenne.

Tout d'abord, pour quelles raisons s'intéresser à la modélisation de ces systèmes ? Après tout, il ne s'agit pas de calculer l'écoulement d'un fluide pour faire voler un avion ou optimiser la carène d'un bateau. Quel intérêt peut-il y avoir à reproduire le comportement des animaux grégaires ou à comprendre comment des termites construisent leur nid, au delà bien sûr de la soif légitime de connaissance qui est à l'origine de toute recherche ? Il y a tout d'abord des enjeux environementaux ou sociétaux. Par exemple, la survie d'une espèce grégaire est très nettement dépendante de la taille caractéristique des groupes qu'elle est capable de constituer. Ainsi, la viabilité des bancs de poissons est menacée lorsque ceux-ci ont une taille trop petite. Il en est de même pour certaines espèces d'oiseaux, comme les manchots Adélie qui deviennent incapables de résister à la pression prédatrice lorsque la taille de la colonie est trop petite. Comprendre par quels mécanismes sociaux la taille des groupes influe sur leur viabilité est typiquement une question à laquelle la modélisation des interactions sociales au sein du groupe peut apporter des éléments d'information, éléments qui peuvent ensuite servir à l'élaboration de politiques de prévention. La modélisation du comportement des foules humaines présente également de forts enjeux sociétaux, en termes de sécurité, d'efficacité et de rentabilité. Enfin, au niveau biologique la compréhension des mécanismes de migration collective des cellules peut ouvrir de nouveaux paradigmes dans des domaines comme la médecine régénérative.

D'autre enjeux, également considérables, se déclinent en termes technologiques : les sciences de l'ingénieur s'ouvrent de plus en plus aux approches bio-mimétiques qui scrutent la nature pour essayer de s'en inspirer. La robotique étudie les mécanismes d'interactions sociales pour constituer des flotilles de robots ou de drones capables de résoudre de manière autonome des tâches complexes (comme la surveillance des massifs forestiers contre les incendies), de s'auto-adapter et d'apprendre de nouvelles compétences. Récemment des stratégies s'inspirant du vol des oies sauvages ont été proposées pour coordonner des flotilles de satellites. L'architecture elle-même surfant sur la vogue des éco-bâtiments ou éco-quartiers s'intéresse à la manière dont les termites résolvent des problèmes comme celui de la régulation thermique au sein de la termitière. Enfin, il ne faut pas négliger l'industrie du divertissement, porteuse d'un potentiel économique considérable. De plus en plus de films, et pas seulement d'animation, font appel à des images virtuelles. Etre capable de créer des séquences vidéos crédibles de foules d'êtres humains (ou non-humains comme les hordes d'Orcs dans le film "Le Seigneur des Anneaux" qui ont été créés à partir de logiciels d'animation graphique) nécessite une compréhension intime des mécanismes d'interaction sociale et des mouvements collectifs.

Pour comprendre comment les systèmes auto-organisés suggèrent de nouveaux problèmes fascinants pour les mathématiciens, il faut d'abord revenir un peu en arrière et examiner comment les mathématiciens et les physiciens abordent les grands systèmes d'agents en interaction (en physique on parle de systèmes de particules). En effet, les systèmes auto-organisés sont des exemples particuliers de systèmes de particules et les théories classiques devraient pouvoir s'appliquer. En fait, il n'en est rien car les systèmes auxquels la théorie cinétique s'est intéressée sont issus de la physique et possèdent donc des caractéristiques particulières que je vais essayer de décrire maintenant. Ces caractéristiques particulières ne sont en général pas vérifiées par les systèmes auto-organisés et par conséquent l'étude de ces derniers demande la mise au point de nouveaux concepts mathématiques.

Les systèmes à grand nombre de particules peuvent être décrits (modélisés) à différents niveaux de détail. Les modèles qui procurent la description ultime, la plus précise, sont les modèles dit 'Individus-Centrés' ou 'Agents-Centrés', encore appelés, modèles de particules en physique. Ils consistent à écrire un grand système d'équations différentielles (déterministes ou stochastiques) couplées qui décrit la position et l'état (vitesse, orientation, etc.) de chaque agent au cours du temps. Lorsqu'il y a beaucoup de particules en interaction, ces systèmes sont très coûteux à résoudre numériquement car leur coût croît polynomialement avec le nombre de particules.

De plus, les modèles de particules ou 'Individus-Centrés' ne fournissent pas une information exploitable directement. En effet, dans la pratique, on se moque de connaître la position de chaque agent. Ce qui nous intéresse ce sont des grandeurs moyennes comme par exemple, en supposant que les agents s'assemblent en groupes ou clusters, le nombre de clusters, la statistique des tailles de clusters, etc. Pour obtenir des informations exploitables, il faut donc appliquer un post-traitement aux résultats de ces modèles, ce qui n'est pas toujours immédiat. Dans le cas des clusters par exemple, il faut appliquer une méthode dite de 'clustering' dont les résultats sont dépendants de la méthode et de ses paramètres (comme par exemple la définition d'une métrique qui permettra d'affirmer que deux particules sont 'proches' et donc appartiennent au même cluster). Les modèles individus-centrés sont discrets par nature, alors que la morpho-analyse des grands systèmes nécessite des quantités continues obtenues comme moyennes 'à gros grains' des quantités discrètes. Ce que l'oeil sait faire instinctivement - tracer mentalement le contour du banc de poissons - est une tâche particulièrement ardue à réaliser automatiquement.

Il faut donc rechercher des modèles qui opèrent sur des quantités plus macroscopiques décrivant le comportement statistique moyen des agents. Pour obtenir de tels modèles, dits continus, on peut bien entendu procéder de manière heuristique : Les premiers modèles continus pour les systèmes auto-organisés ont été produits de cette manière [22] . Néanmoins, il est indispensable d'établir un lien rigoureux et systématique entre les modèles continus et leurs pendants microscopiques. En effet, bien souvent, le modèle microscopique lui-même est mal connu : par exemple, il est quasiment impossible de déterminer avec certitude les lois d'interaction entre des poissons dans un banc, des insectes dans un essaim ou même des piétons dans une foule. En revanche, il est relativement facile d'observer les structures à grande échelle du système (mouvement du banc, formation des files dans la foule). Celles-ci fournissent des informations qui, rapportées à un modèle continu, permettent d'en calibrer les paramètres. Une fois les paramètres du modèle continu connus, il est possible de remonter aux lois des interactions individuelles à condition qu'un lien rigoureux ait été établi entre le niveau discret et le niveau continu.

Cette approche mérite quelques commentaires. En physique classique, on a tendance à adopter une approche ascendante : on étudie une particule, puis deux, puis trois, puis un petit nombre puis on fait tendre ce nombre vers l'infini pour obtenir le modèle continu. Dans l'étude des systèmes auto-organisés, on doit souvent adopter une approche descendante. Des connaissances des lois du système dans son ensemble, on doit essayer d'en extraire les lois individuelles. C'est une mini-révolution dans la méthodologie scientifique. Cette révolution affecte particulièrement la biologie, où l'approche systémique (descendante) prend une importance croissante au détriment de l'approche réductionniste (ascendante). Cette dernière, qui commence par étudier une protéine ou un gène, puis un réseau de régulation simple, puis qui complexifie progressivement le réseau aboutit à la fin à un résultat tellement complexe qu'il en devient difficilement exploitable. Par ailleurs, les techniques d'analyse ont également subi une révolution quantitative telle qu'il devient maintenant possible d'étudier simultanément un nombre de composants et où une approche systémique devient indispensable.

Les modèles continus sont obtenus par des procédés de moyenne, de passage à gros grains (ou coarsening) à partir des modèles microscopiques. Traditionnellement, on distingue deux niveaux de coarsening. Un premier niveau consiste à utiliser une description statistique du système, c'est à dire à remplacer la connaissance supposée parfaite de la position et de l'état de chaque agent par une description probabiliste. Les modèles qui en résultent sont appelés "modèles cinétiques". En général, pour un système de particules en interaction, il n'est pas possible d'obtenir une équation fermée pour la distribution de probabilité qu'une particule prise au hasard occupe une position et un état donné à un instant donné. Pour qu'il soit possible d'écrire une telle équation, il faut faire une hypothèse dénommée "propagation du chaos". Selon cette hypothèse, les particules sont statistiquement indépendantes et la distribution d'une particule prise au hasard est représentative de la distribution de n'importe quelle autre particule du système. Notons qu'ici le terme de chaos est pris au sens d'indépendance statistique. Il n'y a pas de lien (tout au moins pas immédiat) avec le "chaos" de la théorie du chaos.

En général, pour un système avec un nombre fini de particules, la propriété de propagation du chaos est fausse. En effet, les interactions créent des corrélations entre les particules et même si celles-ci sont statistiquement indépendantes à l'instant initial, elles cessent de l'être dès que le temps croît. Toutefois, on peut prouver que, pour certains systèmes modèles, les corrélations produites par les interactions entre les particules décroissent avec le nombre de particules. Ainsi, la propriété de propagation du chaos devient vraie à la limite d'un nombre infini de particules. Intuitivement, quand le nombre de particules est grand, la position et l'état d'une particule donnée n'a qu'une influence relative faible sur le reste du système. Démontrer un résultat de propagation du chaos est une tâche mathématique ardue et, jusqu'à des progrès récents réalisés par C. Mouhot et S. Mischler [18], le seul résultat -très partiel- était du à O. Lanford [17]. Des prototypes de modèles cinétiques obtenus sous l'hypothèse de propagation du chaos (démontrée ou non) sont les équations de Boltzmann et de Fokker-Planck. Ce sont des équations aux dérivées partielles incluant parfois des opérateurs intégraux. Surtout, elles sont posées sur un espace dont la dimension est égale au nombre de paramètres décrivant la position et l'état des particules. Ainsi, si les particules sont décrites par une position dans $\mathbb{R}^n$ et une orientation appartenant à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, l'équation cinétique sera posée sur la variété $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Le niveau ultime de coarsening consiste à réduire la description du système à quelques quantités macroscopiques moyennes, telles que le densité, la vitesse moyenne, le paramètre d'ordre, etc, qui sont fonctions de la position et du temps. Les modèles ainsi produits sont les modèles fluides. Ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, dont les prototypes sont les équations d'Euler, de Navier-Stokes, de diffusion, etc. La dérivation des modèles fluides à partir des modèles cinétiques s'effectue en moyennant les équations sur les variables d'état des particules (telles que la vitesse, l'orientation), pour ne plus conserver qu'une information spatio-temporelle. Là encore, la procédure ne fournit pas spontanément de système d'équations fermé, à moins d'effectuer une hypothèse dite de fermeture sur la distribution de probabilité des particules. Cette hypothèse peut être justifiée dans le régime hydrodynamique lorsque les phénomènes mis en jeu dans le modèle cinétique contribuent précisément à rapprocher la distribution de probabilité des particules de la distribution postulée.

Un appareil mathématique considérable a été développé pour donner un cadre rigoureux à ces approches depuis que Hilbert a posé le problème dans son adresse de 1900 (il s'agit du sixième problème de Hilbert : "développer mathématiquement les processus limitatifs, juste esquissés, qui mènent de la vision atomiste aux lois du mouvement du continu."). La théorie cinétique a connu des développements impressionnants, en particulier en France où deux mathématiciens travaillant dans ce domaine, P. L. Lions et C. Villani, ont reçu la Médaille Fields. Il semble donc que le terrain est propice à l'application des méthodes de la théorie cinétique aux systèmes auto-organisés.

En fait, cette application s'avère plus délicate que prévu, et de nouvelles questions mathématiques passionnantes ont émergé de ces difficultés. On peut notamment lister trois difficultés principales, mais bien entendu, il ne s'agit pas d'une liste exhaustive. Une des premières difficultés questionne d'emblée la validité de l'approche cinétique. Il s'agit en effet tout simplement de remettre en question la propriété de propagation du chaos. En effet, l'auto-organisation suppose la construction de corrélations entre les particules. Nous avons déjà noté que les corrélations à grande distance sont la signature des états critiques que les systèmes auto-organisés atteignent généralement spontanément au cours de leur dynamique, ceux-ci se comportant comme des attracteurs du système. Dans un système auto-organisé, l'observation d'un agent au hasard (par exemple un poisson au sein d'un banc) permet d'en déduire des informations sur les autres agents dans un voisinage plus ou moins large (ici, les voisins du poisson considéré). C'est bien la signature de corrélations importantes entre les agents du système, dont il n'est pas évident qu'elles disparaissent lorsque le nombre de particules augmente. On a observé plus haut au contraire que l'accroissement du nombre de particules était généralement associé à un accroissement de l'ordre du système. Il semble donc bien que, au moins pour un certain nombre de systèmes auto-organisés, la propriété de propagation du chaos soit invalidée. C'est ce que nous avons observé (avec E. Carlen et B. Wennberg, [5]) dans un système modèle pour lequel nous avons pu expliciter complètement la solution de la hiérarchie des distributions de probabilité d'ordre supérieur (probababilités conjointes à deux, trois ou plus de particules). La question fondamentale qui se pose alors est la suivante : quelles équations vont remplacer les équations cinétiques dans les situations où la propagation du chaos est invalide. Des réponses phénoménologiques ont été proposées en physique (fermeture de Kirkwood par exemple) mais à notre connaissance, aucune théorie mathématique même formelle n'a été proposée pour l'instant.

La seconde question concerne le passage des modèles cinétiques aux modèles fluides. Dans la physique classique, un des concepts fondamentaux qui permet d'effectuer ce passage est celui de loi de conservation (conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie, du moment angulaire, etc.). On observe que les interactions microscopiques entre particules préservent localement ces quantités et que donc ces conservations doivent 'passer' à l'échelle macroscopique. Cette propriété est tellement fondamentale que les modèles fluides sont souvent appelés "systèmes de lois de conservation". Or la plupart des systèmes auto-organisés d'origine biologique ou sociale n'ont strictement aucune raison d'obéir à des lois de conservation. Les animaux ou les cellules métabolisent des susbstances chimiques pour en retirer de l'énergie et conséquemment, de l'impulsion. De manière analogue, les véhicules sur une autoroute sont munis d'accélérateurs et de freins qui leur permettent d'augmenter ou de diminuer leur impulsion. Il n'a donc pas de raisons physiques à ce que les modèles macroscopiques soient le reflet de quelconques lois de conservation.

Pourtant, nous avons pu montrer dans une série de travaux initiée dans [15] que des lois de conservation 'affaiblies' pouvaient subsister. Ces lois de conservation proviennent de ce que les interactions élémentaires ne conservent pas des quantités absolues (comme l'impulsion) mais des quantités dépendantes de la distribution de probabilité des agents. Dans la dynamique d'alignement considérée dans [15], laquelle repose sur un paradigme proposé par Vicsek [23] (voir ci-dessous), il n'y a pas de conservation de l'impulsion totale, mais une certaine moyenne de l'impulsion dans la direction transverse à la vitesse moyenne est conservée par l'interaction. Cette observation a donné lieu au concept d'invariant collisionnel généralisé. Les modèles hydrodynamiques obtenus appartiennent par voie de conséquence à la classe des modèles hyperboliques non-conservatifs. Ces modèles présentent des difficultés mathématiques considérables (notamment dans la définition et la sélection des bonnes solutions discontinues, ou ondes de choc) encore très imparfaitement résolues. La difficulté des modèles obtenus dans [15] se double de la présence d'une contrainte géométrique qui en font des objets nouveaux dont l'étude mathématique est quasi-totalement ouverte (il existe tout juste un résultat d'existence de solutions locales en temps démontré dans [12]). Le concept d'Invariant Collisionnel Généralisé s'est avéré fécond dans plusieurs autres contextes. On a pu ainsi l'utiliser pour proposer une dérivation microscopique du modèle de Landau-Lifschitz-Gilbert du micro-magnétisme dans [11] ou plus récemment pour obtenir des modèles macroscopiques d'évolution de la distribution de richesse pour des économies non-conservatives [14]. Au passage, ce dernier exemple montre des relations insoupçonnées entre les états d'équilibres des systèmes auto-organisés et les équilibres de Nash dans la théorie des jeux [13].

La troisième question concerne la prééminence des états critiques et des transitions de phase dans la dynamique des systèmes auto-organisés. La présence de transition de phases n'est pas l'apanage des systèmes auto-organisés. De nombreux systèmes physiques présentent ce type de phénomène. Toutefois, le fait que l'état critique soit un attracteur du système impose de nouvelles contraintes sur les modèles, notamment les modèles fluides. Il est en effet nécessaire que ces modèles fluides décrivent correctement l'état critique et la possibilité que le système bascule dans une ou l'autre des phases associées à cet état. Des phénomènes complexes comme l'hystérésis, qui font intervenir l'histoire du système, doivent également être correctement rendus. Les phénomènes d'hystérésis semblent en effet intervenir de manière assez répandue dans les systèmes auto-organisés [6] et sont liés à la présence d'états d'équilibres multiples et à la métastabilité de ceux-ci. En trafic routier, par exemple, il n'est pas rare qu'une congestion persiste même lorsque la densité du système est revenue à une valeur où, dans d'autres circonstances, le trafic serait fluide.

Or les différentes phases conduisent généralement à des modèles fluides de nature différente. Prenons par exemple le cas des transitions de phase avec brisure de symétrie qui sont très répandues dans les systèmes auto-organisés et dont un des paradigmes est fourni par le modèle de Vicsek. Dans ce modèle, des particules auto-propulsées, dont les vitesses sont de norme constante, tentent de s'aligner sur leur voisines mais subissent par ailleurs un bruit dans l'orientation de leur vitesse. A fort bruit (ou à faible densité), les fluctuations stochastiques l'emportent sur la tendance à l'alignement et l'état du système est désordonné, avec une orientation des vitesses aléatoire. Pour cette phase désordonnée, le modèle macroscopique associé est un modèle de diffusion, de type parabolique. Lorsque le bruit diminue ou que la densité augmente, une transition de phase se produit et une orientation globale des particules émerge. Pour cette phase ordonnée, le modèle macroscopique est un modèle hydrodynamique, de type hyperbolique. Une description de ces différents types de modèles est proposée dans [9, 10]. Ainsi il y a changement de type du modèle à la traversée de la transition de phase. A l'état critique, certaines parties du système sont dans la phase désordonnée et coexistent avec d'autre régions qui se trouvent dans la phase ordonnée. On doit donc alors trouver le moyen de faire coexister des modèles fluides de type différent et de les coupler à travers l'étroite région de l'espace où se produit la transition. A l'heure actuelle, il n'existe aucune théorie sur la manière d'obtenir rigoureusement les conditions d'interface.

La brisure de symétrie a été utilisée dans un contexte assez surprenant, pour concevoir des tests automatisés de fertilité pour des échantillons de sperme ovin. En effet, le mouvement collectif du milliard de spermatozoides par millilitre que contient le sperme ovin met le plasma séminal en mouvement. En observant une goutte de sperme non-dilué sous le microscope, on peut observer des tourbillons très similaires a ceux d'une eau agitée (à la différence d'échelle près bien sûr). Cette motilité collective du sperme est appelée motilité massale et est un marqueur prouvé de la fertilité d'un échantillon de sperme [8]. Cette propriété est utilisée routinièrement dans les centres d'Insémination Artificielle pour sélectionner les échantillons les plus fertiles en vue de leur commercialisation. Pour mesurer objectivement la motilité massale, l'idée est venue de confiner celui-ci dans un anneau. Après quelques secondes de mouvement désordonné, les spermatozoides se mettent à choisir un sens de rotation donné, brisant ainsi la symétrie de départ. La mesure de la vitesse de rotation, très facile, permet de quantifier la motilité massale. Un brevet a été déposé [7].

D'autres types de transition de phase interviennent dans les systèmes auto-organisés comme la transition de jamming, qui se produit lorsque des particules de taille finie atteignent des densités telles qu'elles se retrouvent au contact les unes des autres. Cette transition est à l'oeuvre par exemple dans les groupes d'animaux tels les ongulés [16] ou dans les foules [1]. Une autre transition couramment observée est celle du continu vers le discret, le milieu discret pouvant prendre la forme d'un réseau. Un exemple en est la formation des pistes de fourmis. Celles-ci sont le produit d'un marquage chimique par des phéromones déposées par les fourmis lors de leurs déplacements. Selon les caractéristiques de ce marquage (fréquence de dépôt, taux d'évaporation), on assiste à une transition entre un processus de diffusion continu vers la formation d'un réseau de pistes empruntés de manière préférentielle par les agents. La dérivation de modèles macroscopiques et la prise en compte de ce type de transition de phase en est encore à un stade très préliminaire (voir par exemple [3]).

Il existe bien d'autres défis passionnants posés par les systèmes auto-organisés et tout mathématicien peut puiser dans une source de problèmes fascinants en fonction de ses intérêts. Ainsi il existe des questions de géométrie (quelle est la trajectoire choisie par une fourmi sur une surface courbe, qu'est ce qui détermine l'évolution de la surface enveloppant la nuée d'étourneaux), de topologie (comment classifier les différentes structures de nids d'insectes sociaux et comment expliquer leurs différences) ou de systèmes dynamiques (combien faut-il de leaders dans un troupeau de moutons pour prendre le contrôle du troupeau), etc. Cette courte présentation a pris le parti de se focaliser sur la dynamique macroscopique des grands systèmes pour montrer à quel point l'étude de des systèmes auto-organisés pouvait contribuer à stimuler les questionnements mathématiques. On peut résumer le propos de cet article en disant que la dynamique des systèmes auto-organisés pose de nouvelles questions qui nécessitent l'invention de nouveaux concepts mathématiques. L'espoir est grand que ces nouveaux concepts puissent en retour permettre d'avancer sur des questions mathématiques centrales en élargissant le champ de la pensée et en mettant à l'épreuve les concepts classiques.

Références

[1] C. Appert-Rolland, P. Degond, S. Motsch, Two-way multi-lane traffic model for pedestrians in corridors, Netw. Heterog. Media, 6 (2011) 351-381.

[2] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality : an explanation of $1/f$ noise, Phys. Rev. Lett., 59 (1987) 381-384.

[3] E. Boissard, P. Degond, S. Motsch, Trail formation based on directed pheromone deposition, J. Math. Biol., 66 (2013) 1267-1301.

[4] A. Bricard, J-B. Caussin, N. Desreumaux, O. Dauchot, D. Bartolo, Emergence of macroscopic directed motion in populations of motile colloids, Nature 503 (2013) 95-98.

[5] E. Carlen, P. Degond, and B Wennberg, Kinetic limits for pair-interaction driven master equations and biological swarm models, Math. Models Methods Appl. Sci., 23 (2013) 1339-1376.

[6] I. D. Couzin, J. Krause, R. James, G. D. Ruxton and N. R. Franks, Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups, J. theor. Biol., 218 (2002) 1-11.

[7] A. Creppy, P. Degond, O. Praud, F. Plouraboué, Dispositif de traitement d'un échantillon d'un fluide biologique actif, dépôt de brevet FR 13 61662, 26 Novembre 2013.

[8] I. David, X. Druart, G. Lagriffoul, E. Manfredi, C. Robert-Granié, L. Bodin, Genetic and environmental effects on semen traits in Lacaune and Manech tête rousse AI rams, Genet. Sel. Evol., 39 (2007) 405-419.

[9] P. Degond, A. Frouvelle, J-G. Liu, Macroscopic limits and phase transition in a system of self-propelled particles, J. Nonlinear Sci., 23 (2013) 427-456.

[10] P. Degond, A. Frouvelle, J-G. Liu, Phase transitions, hysteresis, and hyperbolicity for self-organized alignment dynamics, preprint. arXiv :1304.2929

[11] P. Degond, J-G. Liu, Hydrodynamics of self-alignment interactions with precession and derivation of the Landau-Lifschitz-Gilbert equation, Math. Models Methods Appl. Sci., 22 Suppl. 1 (2012) 1140001.

[12] P. Degond, J-G. Liu, S. Motsch, V. Panferov, Hydrodynamic models of self-organized dynamics : derivation and existence theory, Methods Appl. Anal., 20 (2013) 089-114.

[13] P. Degond, J.-G. Liu, C. Ringhofer, Large-scale dynamics of Mean-Field Games driven by local Nash equilibria, J. Nonlinear Sci. 24 (2014) 93-115.

[14] P. Degond, J.-G. Liu, C. Ringhofer, Evolution of wealth in a nonconservative economy driven by local Nash equilibria. Submitted. arXiv :1403.7800

[15] P. Degond, S. Motsch, Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction, Math. Models Methods Appl. Sci., 18 Suppl. (2008) 1193-1215.

[16] P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez, Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness, J. Stat. Phys., 138 (2010) 85-125.

[17] O. E. Lanford, III. On a derivation of the Boltzmann equation. In International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975), page 117-137. Astérisque, No. 40. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[18] S. Mischler, C. Mouhot, Kac's Program in Kinetic Theory, Invent. Math., 193 (2013) 1-147,

[19] J. Monod, *Chance and Necessity : An Essay on the Natural Philosophy of Modern Biology*, Alfred A. Knopf, New York, 1971.

[20] M. Moussaïd, E. G. Guillot, M. Moreau, J. Fehrenbach, O. Chabiron, S. Lemercier, J. Pettré, C. Appert-Rolland, P. Degond, G. Theraulaz, Traffic Instabilities in Self-organized Pedestrian Crowds, PLoS Computational Biology, 8 (2012) e1002442

[21] S. Pizzarelloa, L. B. Williams, J. Lehman, G. P. Holland, J. L. Yarger, Abundant ammonia in primitive asteroids and the case for a possible exobiology, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 108 (2011) 4303-4306.

[22] J. Toner, Y. Tu and S. Ramaswamy, Hydrodynamics and phases of flocks, Annals of Physics, 318 (2005) 170-244

[23] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet, Novel type of phase transition in a system of self-driven particles, Phys. Rev. Lett., 75 (1995) 1226-1229.

[24] T. Vicsek, A. Zafeiris, Collective motion, Phys. Rep., 517 (2012) 71-140.