

---

# SPECTRE DES SYSTÈMES INTÉGRABLES QUANTIQUES ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

*par*

David Hernandez

---

*Résumé.* — La structure des valeurs propres d'un système quantique, c'est-à-dire de son spectre, est essentielle à sa compréhension. Dans un célèbre article daté de 1971, Baxter a calculé ces valeurs propres pour le modèle « de la glace ». Il a montré qu'elles ont une forme remarquable et régulière faisant intervenir des polynômes. Dans les années 1980-1990, il a été conjecturé que de tels polynômes permettent de décrire le spectre de nombreux systèmes quantiques plus généraux. Nous allons voir comment, en adoptant le point de vue mathématique de la théorie des représentations, ces polynômes (de Baxter) apparaissent naturellement. Ce résultat nous a permis de démontrer en 2013 la conjecture générale.

## 1. Systèmes intégrables quantiques

Le **modèle à 6 sommets** est un célèbre modèle de **physique statistique** introduit par Pauling en 1935, qui permet notamment de décrire le cristal de la glace (voir [B2]). Il est réalisé sur un réseau dont chaque sommet est relié à 4 autres sommets. Un état du système est une orientation des arêtes telle qu'à chaque sommet arrivent exactement 2 flèches (Figure 1). Les flèches représentent l'orientation des molécules d'eau du cristal les unes par rapport aux autres. Il y a 6 configurations possibles à chaque sommet (Figure 2), ce qui justifie l'appellation de ce modèle.

L'étude du modèle de la glace est fortement liée à celle d'un autre modèle, cette fois-ci en **physique statistique quantique**, appelé **modèle  $XXZ$**  de Spin 1/2, dit de Heisenberg quantique (1928). Il s'agit d'une variante en physique quantique du modèle d'Ising (1925) (voir [JM]), qui modélise des chaînes de spins magnétiques quantiques ayant deux états classiques, haut ou bas (Figure 3).

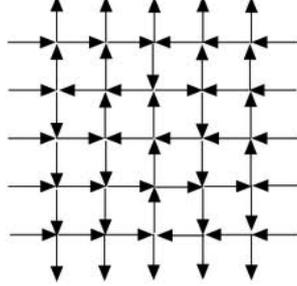


FIGURE 1. Une orientation d'un réseau (modèle à 6 sommets).

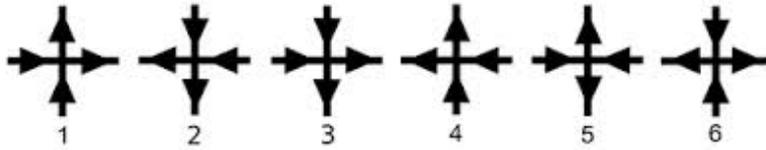


FIGURE 2. 6 configurations possibles à chaque sommet.



FIGURE 3. Etats d'un Spin 1/2 (haut ou bas).

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle  $XXZ$ , figurent parmi les plus étudiés en physique statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches. En dépit de leur formulation assez élémentaire, ils sont extrêmement riches et leur analyse a une très longue histoire.

En physique statistique (quantique), le comportement du système est contrôlé par la **fonction de partition**  $\mathcal{Z}$ <sup>(1)</sup>, qui permet d'obtenir les grandeurs mesurables<sup>(2)</sup>. Cette fonction  $\mathcal{Z}$  est très difficile à calculer en général. La méthode de la **matrice de**

<sup>(1)</sup>En physique statistique, la fonction de partition s'exprime comme la somme  $\sum_j \exp(-E_j/(k_B T))$  sur tous les états  $j$  du système, où  $E_j$  est l'énergie de l'état  $j$ ,  $T$  est la température du système et  $k_B$  la constante de Boltzmann. En physique quantique, la somme est remplacée par une trace  $\text{Tr}_W(\exp(-E/(k_B T)))$  où  $E$  est l'opérateur « hamiltonien » qui agit sur l'espace  $W$  des états quantiques du système.

<sup>(2)</sup>La grandeur  $Q$  est obtenue comme moyenne pondérée sur les états  $\frac{\sum_j \exp(-E_j/(k_B T)) Q_j}{\mathcal{Z}}$  des valeurs  $Q_j$  sur chaque état  $j$ .

**transfert** est un procédé pour tenter de la déterminer : il s'agit d'écrire  $\mathcal{Z}$  comme trace d'un opérateur  $\mathcal{T}$  (la matrice de transfert) agissant sur l'**espace des états**  $W$  :

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}_W(\mathcal{T}^M).$$

Ici  $M$  est un entier associé à la taille du réseau du modèle. Ainsi, pour trouver  $\mathcal{Z}$ , il suffit d'obtenir les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{Z} = \sum_j \lambda_j^M.$$

Le spectre  $\{\lambda_j\}_j$  de  $\mathcal{T}$  est appelé le **spectre du système quantique**.

Dans un célèbre article séminal de 1971, inspiré notamment par les travaux de Bethe (1931), Baxter [B1] a complètement résolu ce problème<sup>(3)</sup>. Grâce à une étude très précise il a notamment montré que les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}$  ont une structure tout à fait remarquable : elles s'expriment sous la forme

$$(1.1) \quad \lambda_j = A(z) \frac{Q_j(zq^2)}{Q_j(z)} + D(z) \frac{Q_j(zq^{-2})}{Q_j(z)},$$

où  $z, q \in \mathbb{C}^*$  sont des paramètres du modèle (respectivement spectral et quantique),  $A(z)$  et  $D(z)$  sont des fonctions « universelles » (au sens où elles ne dépendent pas de la valeur propre  $\lambda_j$ ). La fonction  $Q_j(z)$  dépend de la valeur propre, mais c'est un polynôme. La relation (1.1) est la fameuse **relation de Baxter** (ou « relation  $TQ$  de Baxter »). Les polynômes  $Q_j$  sont appelés **polynômes de Baxter**.

En résultent alors naturellement les questions suivantes :

- Y a-t-il une explication pour l'existence de la relation de Baxter ?
- Une expression analogue avec des polynômes permet-elle de décrire le spectre d'autres systèmes quantiques ?

Une conjecture formulée en 1998 par Frenkel-Reshetikhin [FR] affirme que la deuxième question doit avoir une réponse positive. Comme on ne peut espérer effectuer en général le calcul détaillé de Baxter qui est connu pour le modèle  $XXZ$ , c'est en répondant à la première question que nous pouvons démontrer cette conjecture. Pour ce faire, étudions les structures mathématiques, algébriques, sous-jacentes à la théorie.

## 2. Groupes quantiques et leurs représentations

Les **groupes quantiques** sont graduellement apparus au cours des années 1970, en particulier dans les travaux de l'école de Leningrad, comme le cadre naturel mathématique pour étudier les matrices de transfert. Drinfeld [D1] et Jimbo [J]

<sup>(3)</sup>Baxter a introduit la méthode puissante des « Q-opérateurs » qui a lui a également permis de résoudre le modèle « à 8 sommets », plus complexe. Le modèle à 6 sommets avait aussi été résolu par d'autres méthodes, notamment dans les travaux de Lieb et Sutherland (1967).

ont indépendamment découvert une formulation algébrique uniforme sous forme d'**algèbres de Hopf**. Il s'agit d'un des résultats cités pour la médaille Fields de Drinfeld en 1990.

Pour introduire les groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo, considérons d'abord un objet très classique, une **algèbre de Lie** (simple) complexe de dimension finie. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{g}$  muni d'un **crochet de Lie**, c'est-à-dire d'une application bilinéaire antisymétrique

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

satisfaisant la formule de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ pour tous } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

L'exemple le plus simple, mais néanmoins non trivial car il correspond au modèle  $XXZ$ , est celui de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  : c'est l'espace des matrices complexes  $2 \times 2$  de trace nulle, muni du crochet naturel

$$[M, N] = MN - NM$$

pour lequel il est clairement stable. Pour les générateurs linéaires

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a par exemple la relation

$$(2.2) \quad [E, F] = H.$$

Ces algèbres de Lie ont des analogues naturelles de dimension infinie, les **algèbres de lacets**

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \otimes \mathfrak{g},$$

avec le crochet de Lie défini par

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] = [x, y] \otimes (fg)(t) \text{ pour } x, y \in \mathfrak{g} \text{ et } f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}],$$

ce qui revient à remplacer le corps  $\mathbb{C}$  par l'anneau des polynômes de Laurent complexes

$$\mathbb{C}[t^{\pm 1}] = \left\{ \sum_{N \leq i \leq M} a_i t^i \mid N, M \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ces algèbres sont des quotients d'**algèbres de Kac-Moody affines**, qui ont des propriétés algébriques semblables à celles des algèbres de Lie simples de dimension finie (notamment une présentation analogue à celle de Serre pour  $\mathfrak{g}$ , comme l'ont montré Kac (1968) et Moody (1969), voir [K]). Elles ont été étudiées intensivement pour leurs diverses applications en mathématiques et physique mathématique.

Maintenant, pour étudier les systèmes quantiques qui nous intéressent, ces algèbres de Lie classiques doivent être **quantifiées**, c'est-à-dire déformées en tenant compte du paramètre de quantique

$$q = \exp(h) \in \mathbb{C}^*,$$

où  $h$  est un analogue de la grandeur de Planck ( $q$  sera bien identifié au paramètre quantique de la relation (1.1)). On retrouve les structures classiques pour  $h \rightarrow 0$ , donc  $q \rightarrow 1$ . On supposera dans la suite que  $q$  n'est pas une racine de l'unité.

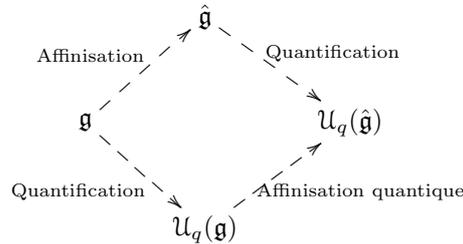
Bien qu'une telle quantification des algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  ou  $\hat{\mathfrak{g}}$  elles-mêmes ne soit pas connue, Drinfeld et Jimbo ont découvert qu'il existe une quantification naturelle de leurs **algèbres enveloppantes** respectives  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$  (algèbres universelles définies à partir des algèbres de Lie, par exemple en remplaçant dans la présentation de Serre les crochets  $[x, y]$  par des expressions algébriques  $xy - yx$  dans l'algèbre). On obtient alors les groupes quantiques  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  qui dépendent<sup>(4)</sup> du paramètre quantique  $q$ , voir [CP].

Par exemple dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  la relation (2.2) devient

$$[E, F] = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{q - q^{-1}}$$

qui tend bien vers  $H$  quand  $h$  tend vers 0.

Le cas des **algèbres affines quantiques**  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est particulièrement remarquable car Drinfeld [D2] a démontré<sup>(5)</sup> qu'elles peuvent non seulement être obtenues comme quantification de  $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ , mais également, par un autre procédé, comme **affinisation** du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ . C'est la **réalisation de Drinfeld** des algèbres affines quantiques. Ceci peut être énoncé dans le diagramme « commutatif » suivant :



Ce théorème, qui revient à donner deux présentations isomorphes de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , est un analogue quantique du théorème classique de Kac et Moody. Il s'agit d'une bonne indication de l'importance de ces algèbres d'un point de vue algébrique.

Les algèbres affines quantiques  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  ont en fait une structure beaucoup plus riche, ce sont des algèbres de Hopf. Elles sont notamment munies d'une **comultiplication** (qui est une opération duale de la multiplication), c'est-à-dire d'un morphisme d'algèbre

$$(2.3) \quad \Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).$$

<sup>(4)</sup>Elles peuvent être définies comme des algèbres sur  $\mathbb{C}[[h]]$ .

<sup>(5)</sup>La preuve a été précisée par la suite par Beck puis par Damiani.

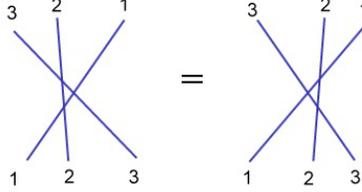


FIGURE 4. Equation de Yang-Baxter

Mais surtout,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  possède une  **$R$ -matrice universelle**, c'est-à-dire un élément (canonique) dans le carré tensoriel<sup>(6)</sup>

$$\mathcal{R}(z) \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[z]]$$

qui est notamment une solution de l'**équation de Yang-Baxter quantique** :

$$\mathcal{R}_{12}(z)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{23}(w) = \mathcal{R}_{23}(w)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{12}(w).$$

Les paramètres formels  $z$ ,  $w$  sont appelés **paramètres spectraux**. Cette équation est à valeurs dans le cube tensoriel

$$(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))^{\otimes 3}[[z, w]].$$

Les indices dans les facteurs indiquent l'emplacement des termes de la  $R$ -matrice universelle :

$$\mathcal{R}_{12}(z) = \mathcal{R}(z) \otimes 1, \quad \mathcal{R}_{23}(z) = 1 \otimes \mathcal{R}(z) \dots$$

Il s'agit d'une équation hautement non triviale, liée aux mouvements de tresses. En effet, dans la figure 4 on retrouve l'équation en lisant de bas en haut et en multipliant par un facteur  $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$  d'indice  $(\alpha, \beta)$  lorsque la tresse  $\alpha$  croise la tresse  $\beta$ . C'est pour cette raison que la théorie des représentations des groupes quantiques permet de construire des invariants en topologie de basse dimension (notamment les polynômes de Jones des nœuds). Il s'agit historiquement, avec la construction par Lusztig et Kashiwara de bases canoniques de représentations des algèbres de Lie classiques, d'un des premiers grands succès de la théorie des groupes quantiques. Nous n'aborderons pas ces sujets ici pour nous concentrer sur les applications aux systèmes quantiques.

Pour décrire des solutions de l'équation de Yang-Baxter quantique, on peut spécialiser sur des **représentations** de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Une représentation (linéaire) de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est un espace vectoriel  $V$  (ici complexe) muni d'un morphisme d'algèbre

$$\rho_V : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(V).$$

Autrement dit, l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  agit sur l'espace  $V$  par opérateurs linéaires.

<sup>(6)</sup>En fait, dans une légère complétion du carré tensoriel.

L'étude des représentations est un vaste domaine, central en mathématiques, appelé **théorie des représentations**. En arithmétique par exemple, les représentations de groupes de Galois jouent un rôle crucial. Elles sont également essentielles dans la formulation même des principes de la physique quantique car ils font intervenir des représentations de l'algèbre des observables.

On définit naturellement la **somme directe de représentations**  $(V, \rho_V)$  et  $(V', \rho_{V'})$  avec l'application  $\rho_{V \oplus V'} = \rho_V + \rho_{V'}$  à valeurs dans  $\text{End}(V \oplus V')$ .

Les **représentations simples**, c'est-à-dire qui n'ont pas de sous-représentation (sous-espace stable pour l'action de l'algèbre) propre, sont particulièrement importantes, comme nous allons le voir dans notre étude. Elles constituent les « briques élémentaires » de la théorie des représentations. Par exemple, toute représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est **semi-simple**, c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de représentations simples<sup>(7)</sup>. Ce n'est pas le cas<sup>(8)</sup> pour l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

Comme  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est munie d'un coproduit (2.3), pour deux représentations  $(V, \rho_V)$  et  $(V', \rho_{V'})$ , le produit tensoriel  $V \otimes V'$  est aussi une représentation en utilisant

$$\rho_{V \otimes V'} = (\rho_V \otimes \rho_{V'}) \circ \Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(V) \otimes \text{End}(V') = \text{End}(V \otimes V').$$

Cette action sur un **produit tensoriel de représentation** sera utile par la suite. Mais indépendamment on peut faire aussi agir directement la  $R$ -matrice universelle sur un carré tensoriel  $V \otimes V$  pour  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  : on peut en effet considérer l'image de la  $R$ -matrice universelle dans  $\text{End}(V^{\otimes 2})(z)$

$$\mathcal{R}_{V,V}(z) = (\rho_V \otimes \rho_V)(\mathcal{R}(z)) \in \text{End}(V)^{\otimes 2}[[z]] = \text{End}(V^{\otimes 2})[[z]].$$

On obtient aussi une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique, dite  **$R$ -matrice**, mais dans l'algèbre de dimension finie  $\text{End}(V^{\otimes 2})[[z]]$ .

Par exemple, dans le cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  possède une représentation de dimension 2 dite **représentation fondamentale** et notée  $V_1$ . Par le procédé décrit ci-dessus, elle produit la  $R$ -matrice suivante<sup>(9)</sup> dans  $\text{End}(V_1^{\otimes 2})[[z]]$  avec  $V_1^{\otimes 2}$  qui est de dimension 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q(z-1)}{z-q^2} & \frac{1-q^2}{z-q^2} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^2)}{z-q^2} & \frac{q(z-1)}{z-q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>(7)</sup>Ce résultat démontré par M. Rosso et G. Lusztig est un analogue quantique du théorème classique de Weyl qui assure que toute représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.

<sup>(8)</sup>Cependant, toute représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  admet une filtration de Jordan-Hölder par des sous-représentations  $V_0 = V \supset V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_N = \{0\}$  avec les  $V_i/V_{i+1}$  simples.

<sup>(9)</sup>La solution explicite de l'équation de Yang-Baxter donnée ici est la  $R$ -matrice « normalisée », obtenue en multipliant  $\mathcal{R}_{V_1, V_1}(z)$  par une certaine fonction scalaire de  $z$ . On peut constater que ses coefficients sont des fonctions méromorphes en  $z$ . C'est un phénomène général, voir [EFK].

C'est la  $R$ -matrice associée au modèle  $XXZ$ . Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  ou la représentation  $V$ . Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

La **matrice de transfert**  $\mathcal{T}_V(z)$  est alors définie en prenant la trace partielle sur la représentation, c'est-à-dire

$$(2.4) \quad \mathcal{T}_V(z) = ((\mathrm{Tr}_V \circ \rho_V) \otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]].$$

La représentation  $V$  qui sert à construire la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  est appelée **espace auxiliaire**. Comme conséquence de l'équation de Baxter, les matrices de transfert commutent, c'est-à-dire que pour une autre représentation  $V'$  on a

$$\mathcal{T}_V(z)\mathcal{T}_{V'}(z') = \mathcal{T}_{V'}(z')\mathcal{T}_V(z) \text{ dans } \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z, z']].$$

Ainsi, les coefficients  $\mathcal{T}_V[n]$  des matrices de transfert, définis par

$$\mathcal{T}_V(z) = \sum_{N \geq 0} z^N \mathcal{T}_V[n],$$

engendrent une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

Donnons-nous une autre représentation de dimension finie  $W$  de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , dite **espace des états**. Les coefficients  $\mathcal{T}_V[n]$  des matrices de transfert agissent donc sur  $W$  en une grande famille commutative d'opérateurs. Ainsi, il fait sens de parler des valeurs propres des matrices de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  sur  $W$ .

Dans le cas particulier du modèle  $XXZ$ , on rappelle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $V$  est une représentation fondamentale de dimension 2. L'espace des états  $W$  est un produit tensoriel de représentations fondamentales de dimension 2 et l'image de l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z)$  dans  $\mathrm{End}(W)[[z]]$  est bien la matrice de transfert de Baxter. Les résultats de Baxter donnent donc la structure du spectre de  $\mathcal{T}_V(z)$  sur  $W$  dans ce cas.

Que dire en général?

### 3. La conjecture du spectre quantique

En 1998 [FR], E. Frenkel et N. Reshetikhin ont proposé une nouvelle approche dans le but de généraliser les formules de Baxter.

À cette fin, ils ont introduit le  $q$ -**caractère**  $\chi_q(V)$  d'une représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Il s'agit d'un polynôme de Laurent à coefficients entiers en des indéterminées  $Y_{i,a}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ )

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{C}^*}.$$

L'entier  $n$  est ici le **rang** de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , qui par exemple vaut bien  $n$  pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ . La définition du  $q$ -caractère de  $V$  repose sur une décomposition de  $V$  en

sous-espaces de Jordan<sup>(10)</sup>  $V_m$  paramétrés par des monôme  $m$  en les variables  $Y_{i,a}^{\pm 1}$  :

$$V = \bigoplus_m V_m.$$

Le  $q$ -caractère encode les dimensions de cette décomposition. Il est défini par

$$\chi_q(V) = \sum_m \dim(V_m)m.$$

Ainsi, les coefficients de  $\chi_q(V)$  sont en fait positifs et leur somme est la dimension  $V$ .

Par exemple, pour  $\mathfrak{g} = sl_2$  et  $V = V_1$  la représentation fondamentale de dimension 2,

$$(3.5) \quad \chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1}.$$

On a donc dans ce cas deux sous-espaces de Jordan de dimension 1 associés aux monômes respectifs  $Y_{1,q^{-1}}$  et  $Y_{1,q}^{-1}$  :

$$V = V_{Y_{1,q^{-1}}} \oplus V_{Y_{1,q}^{-1}}.$$

La **conjecture du spectre quantique** de Frenkel et Reshetikhin [FR] prédit<sup>(11)</sup> que pour une représentation de dimension finie donnée  $V$ , les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}_V(z)$  sur une représentation simple<sup>(12)</sup>  $W$  sont obtenues de la manière suivante : dans le  $q$ -caractère  $\chi_q(V)$  de  $V$ , on remplace chaque variable formelle  $Y_{i,a}$  par<sup>(13)</sup>

$$F_i(az)q^{\deg(Q_{i,j})} \frac{Q_{i,j}(zaq^{-1})}{Q_{i,j}(zaq)},$$

où  $F_i(z)$  est une fonction universelle, au sens où elle ne dépend pas de la valeur propre  $\lambda_j$ , et  $Q_{i,j}(z)$  dépend de la valeur propre  $\lambda_j$  mais est un polynôme. C'est l'analogie du polynôme de Baxter.

Notons que c'est bien le  $q$ -caractère de l'espace auxiliaire  $V$  qui est utilisé pour écrire la formule du spectre de la matrice de transfert sur l'espace des états  $W$ .

Dans le cas particulier du modèle  $XXZ$ , on obtient à partir de (3.5) la formule

$$\lambda_j = F_1(zq^{-1})q^{\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^{-2})}{Q_{1,j}(z)} + (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^2)}{Q_{1,j}(z)}.$$

Ainsi, la conjecture est bien compatible avec la formule de Baxter (1.1) en identifiant

$$A(z) = (D(zq^2))^{-1} = (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})}.$$

<sup>(10)</sup>Pour une famille commutative d'opérateurs sur  $W$ , obtenus à partir de la réalisation de Drinfeld de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  et distincts en général des coefficients des matrices de transfert.

<sup>(11)</sup>Dans des cas particuliers, une conjecture analogue avait été formulée par N. Reshetikhin [R]; V. Bazhanov et N. Reshetikhin [BR]; et A. Kuniba et J. Suzuki [KS].

<sup>(12)</sup>Plus généralement,  $W$  peut être un produit tensoriel de représentations simples.

<sup>(13)</sup>Pour simplifier l'exposition, on supposera dans la suite de  $\mathfrak{g}$  est simplement lacée (c'est le cas notamment des algèbres de Lie  $sl_{n+1}$ ).

On peut détailler par exemple le cas où l'espace des états  $W \simeq V_1$  est de dimension 2. On alors 2 valeurs propres  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ . La fonction universelle est

$$F_1(z) = q^{1/2} \exp \left( \sum_{r>0} \frac{z^r (q^{-r} - q^r)}{r(q^r + q^{-r})} \right),$$

et les polynômes de Baxter sont

$$Q_{1,0}(z) = 1 \text{ et } Q_{1,1}(z) = 1 - z(1 + q + q^2).$$

On obtient donc le spectre

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= F_1(zq^{-1}) \left( 1 + q^{-3} \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}q^{-2}} \right), \\ \lambda_1 &= F_1(zq^{-1}) \left( q \frac{1 - z(1 + q^{-1} + q^{-2})}{1 - z(1 + q + q^2)} + q^{-4} \frac{(1 - z^{-1})(1 - z(q^2 + q^3 + q^4))}{(1 - z^{-1}q^{-2})(1 - z(1 + q + q^2))} \right). \end{aligned}$$

En général la formule peut avoir plus de deux termes. Par exemple, dans le cas d'une certaine représentation fondamentale  $V$  de dimension 3 de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ , le  $q$ -caractère est

$$(3.7) \quad \chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1} Y_{2,1} + Y_{2,q^2}^{-1},$$

et la formule pour le spectre est

$$F_1(zq^{-1}) q^{\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^{-2})}{Q_{1,j}(z)} + \frac{F_2(z) q^{\deg(Q_{2,j})}}{F_1(zq) q^{\deg(Q_{1,j})}} \frac{Q_{1,j}(zq^2) Q_{2,j}(zq^{-1})}{Q_{1,j}(z) Q_{2,j}(zq)} + \frac{q^{-\deg(Q_{2,j})}}{(F_2(zq^2))^{-1}} \frac{Q_{2,j}(zq^3)}{Q_{2,j}(zq)}.$$

Notons qu'en général les représentations simples  $V$  de dimension finie peuvent avoir une dimension « très grande ». Par exemple, H. Nakajima a obtenu (à l'aide d'un super-calculateur et en s'appuyant sur [N]) que dans le cas de l'algèbre de Lie exceptionnelle de type  $E_8$ , une des représentations fondamentales a un  $q$ -caractère avec 6899079264 monômes qui nécessite un fichier de taille mémoire 180 Go pour être écrit. Il y a donc autant de termes dans la formule de Baxter correspondante. Et les représentations fondamentales sont les représentations simples de dimensions les plus basses.

Il est donc hors de question d'aborder cette conjecture par un calcul explicite en général. D'ailleurs, même si les représentations simples de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  ont été intensivement étudiées ces vingt-cinq dernières années, on ne connaît pas en général de formule pour leur  $q$ -caractère, ni même en fait pour leur dimension.

Ainsi, il faut de nouvelles structures pour aborder la conjecture du spectre quantique.

Notre démonstration avec E. Frenkel [FH] de la conjecture du spectre quantique repose ainsi sur de nouveaux ingrédients dont nous donnons un bref aperçu dans les sections suivantes.

#### 4. Représentations fondamentales

L'idée générale de la preuve est d'interpréter les  $Q_i$  eux-mêmes comme des valeurs propres de nouvelles matrices de transfert, construites non pas à partir de représentations de dimension finie  $V$ , mais de représentations de dimension infinie dite **représentations fondamentales**  $L_{i,a}^+$  où  $1 \leq i \leq n$  et  $a \in \mathbb{C}^*$ .

Nous avons construit préalablement ces représentations fondamentales avec M. Jimbo [HJ] dans un contexte un peu différent. Ce ne sont pas des représentations de l'algèbre entière  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , mais d'une certaine sous-algèbre, la **sous-algèbre de Borel**

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).$$

Cela ne pose cependant pas de problème pour construire la matrice de transfert  $\mathcal{T}_{i,a}(z)$  associée à la représentation fondamentale  $L_{i,a}$  par la formule (2.4), car il est justement connu que la partie « gauche » de la  $R$ -matrice universelle (celle à qui on applique  $\rho_{L_{i,a}}$ ) est dans la sous-algèbre de Borel<sup>(14)</sup> :

$$\mathcal{T}_{i,a}(z) = ((\text{Tr}_{L_{i,a}} \circ \rho_{L_{i,a}}) \otimes \text{id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})[[z]].$$

Il n'est alors pas difficile de montrer qu'en utilisant un certain automorphisme de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  on a

$$\mathcal{T}_{i,a}(z) = \mathcal{T}_i(az) \text{ où } \mathcal{T}_i(z) = \mathcal{T}_{i,1}(z).$$

Pour le cas du modèle  $XXZ$ , c'est-à-dire pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , V. Bazhanov, S. Lukyanov, et A. Zamolodchikov avaient déjà construit « à la main » une représentation fondamentale (appelée représentation de  $q$ -oscillation) et la matrice de transfert associée (appelée  $Q$ -opérateur de Baxter) dans l'article important [BLZ].

Pour obtenir l'existence des représentations fondamentales en général [HJ], on ne peut encore une fois pas faire de calculs explicites : le point crucial est de considérer des systèmes inductifs<sup>(15)</sup> de représentations simples  $L_k$  (les représentations de Kirillov-Reshetikhin) de dimension finie strictement croissante avec  $k \geq 0$  et de déterminer en quel sens l'action de la sous-algèbre de Borel  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  « converge » sur la limite inductive  $L_\infty$ , qui elle est de dimension infinie :

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_k \subset L_{k+1} \subset \cdots \subset L_\infty.$$

Il s'agit ainsi d'une construction asymptotique des représentations fondamentales.

En utilisant certaines filtrations de la représentation fondamentale  $L_{i,a}$ , nous établissons qu'effectivement, à un facteur scalaire universel  $f_i(z)$  près, la matrice de transfert associée  $\mathcal{T}_i(z)$  agit sur l'espace des états  $W$  par un opérateur polynômial :

$$\rho_W(\mathcal{T}_i(z)) \in f_i(z) \times (\text{End}(W))[z].$$

<sup>(14)</sup>On ne peut cependant pas appliquer la trace à un espace de dimension infinie. On utilise une graduation naturelle de  $L_i$  par des espaces de dimension finie (les espaces de poids). Ainsi dans la suite, les traces, matrices de transfert, etc. sont « tordues » par cette graduation.

<sup>(15)</sup>Les inclusions  $L_k \subset L_{k+1}$ , construites à l'aide de produits tensoriels de sous-espaces [H], ne sont pas compatibles avec l'action de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  entière mais avec celle d'une sous-algèbre  $\mathcal{U}_q^+(\hat{\mathfrak{b}})$  de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$ .

Il n'est pas difficile d'écrire une formule explicite pour la fonction universelle scalaire  $f_i(z) \in \mathbb{C}[[z]]$  (elle ne dépend que de  $V$  et de  $W$ ). Il est beaucoup plus délicat d'obtenir des informations sur la partie linéaire polynômiale

$$(f_i(z))^{-1} \rho_W(\mathcal{T}_i(z)) \in (\text{End}(W))[z].$$

De même que les matrices de transfert usuelles commutent, on a

$$\mathcal{T}_i(z)\mathcal{T}_i(z') = \mathcal{T}_i(z')\mathcal{T}_i(z),$$

et donc on obtient une famille commutative  $\mathcal{T}_i[m]$  si on écrit

$$\mathcal{T}_i(z) = \sum_{m \geq 0} \mathcal{T}_i[m] z^m.$$

En utilisant la trigonalisation simultanée, cette commutativité implique que les valeurs propres sur  $W$  de  $(f_i(z))^{-1}\mathcal{T}_i(z)$  elles-mêmes sont également des polynômes.

## 5. Anneau de Grothendieck et relations de Baxter

Il faut enfin démontrer que les valeurs propres de la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  s'expriment, comme prévu dans la conjecture, en terme des valeurs propres des  $\mathcal{T}_i(z)$  selon le  $q$ -caractère de  $V$ . Autrement dit, en remplaçant dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par le quotient<sup>(16)</sup>

$$\mathcal{T}_i(azq^{-1})/\mathcal{T}_i(azq),$$

obtient-on la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  ?

Dans le cas  $\mathfrak{g} = \widehat{sl}_2$  et  $V$  de dimension du modèle  $XXZ$ , un calcul [BLZ] donne le résultat. On a bien :

$$\mathcal{T}_V(z) = \frac{\mathcal{T}_1(zq^{-1})}{\mathcal{T}_1(zq)} + \frac{\mathcal{T}_1(zq^3)}{\mathcal{T}_1(zq)}.$$

En général, nous proposons d'utiliser la **catégorie**  $\mathcal{O}$  que nous avons définie avec M. Jimbo [HJ]. Il s'agit d'une **catégorie monoïdale** (stable par produits tensoriels) de représentations de l'algèbre de Borel  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{b}})$ , contenant les représentations de dimension finie ainsi que les représentations fondamentales. Nous **catégorifions** les relations de Baxter généralisées, c'est-à-dire que nous les exprimons en termes de la catégorie  $\mathcal{O}$ . Pour ce faire, on peut définir l'**anneau de Grothendieck**  $K(\mathcal{O})$  de cette catégorie. En tant que groupe, il s'agit du groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes de représentations simples :

$$K(\mathcal{O}) = \bigoplus_{[V] \text{ Classe d'un simple dans } \mathcal{O}} \mathbb{Z}[V].$$

<sup>(16)</sup>Ce quotient doit en fait être multiplié par une matrice de transfert d'une représentation de dimension 1 que nous omettons dans la suite pour simplifier l'exposition.

Alors tout objet (non nécessairement simple) de  $\mathcal{O}$  a une image dans  $K(\mathcal{O})$  en imposant la relation

$$[V''] = [V] + [V']$$

si on a une suite exacte dans la catégorie

$$0 \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow V' \rightarrow 0.$$

On peut alors munir  $K(\mathcal{O})$  d'une structure d'anneau par la relation

$$[V \otimes V'] = [V][V']$$

pour des objets  $V, V'$  de la catégorie  $\mathcal{O}$ .

Un des théorèmes principaux de **[FH]** est qu'en remplaçant dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par le quotient

$$\frac{[L_{i,aq^{-1}}]}{[L_{i,aq}]},$$

en remplaçant  $\chi_q(V)$  par  $[V]$  puis en « chassant » les dénominateurs, on obtient une relation dans l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$ .

Par exemple, dans notre cas favori du modèle  $XXZ$ , on obtient

$$[V] = \frac{[L_{1,q^{-1}}]}{[L_{1,q}]} + \frac{[L_{1,q^3}]}{[L_{1,q}]}$$

qui donne la relation de Baxter catégorifiée dans l'anneau de Grothendieck

$$[V][L_{1,q}] = [V \otimes L_{1,q}] = [L_{1,q^{-1}}] + [L_{1,q^3}].$$

En général on obtient des relations avec plus de termes, comme dans l'exemple pour  $\mathfrak{g} = sl_3$  ci-dessus pour lequel la formule (3.7) donne

$$[V \otimes L_{1,1} \otimes L_{2,q}] = [L_{1,q^{-2}} \otimes L_{2,q}] + [L_{1,q^2} \otimes L_{2,q^{-1}}] + [L_{2,q^3} \otimes L_{1,1}].$$

Maintenant, « prendre la matrice de transfert » est additif et multiplicatif, c'est à dire qu'on a un morphisme d'anneau<sup>(17)</sup>

$$\mathcal{T} : K(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]], [V] \mapsto \mathcal{T}_V(z).$$

Ainsi, les relations de Baxter généralisées dans l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$  impliquent les relations voulues entre les matrices de transfert. La conjecture du spectre quantique est donc démontrée.

\*

---

<sup>(17)</sup> On peut montrer que ce morphisme d'anneau est injectif et donc que l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$  est commutatif (bien que la catégorie ne soit pas tressée, c'est-à-dire que  $V \otimes V'$  et  $V' \otimes V$  ne sont pas isomorphes en général). En fait, l'application de  $q$ -caractères  $[V] \mapsto \chi_q(V)$  elle-même peut être prolongée en un morphisme d'anneau injectif sur  $K(\mathcal{O})$ .

Pour conclure, les formules pour les valeurs propres des matrices de transfert en terme des polynômes  $Q_{i,a}$  impliquent des équations entre les racines de ces polynômes pour garantir que les pôles apparents se simplifient (par exemple dans l'équation (3.6),  $(1+q+q^2)^{-1}$  n'est en fait pas un pôle de  $\lambda_1$ ). Dans le cas du modèle  $XXZ$  ce sont les fameuses équations de l'Ansatz de Bethe. Ces considérations ont mené N. Reshetikhin [R] à formuler ces équations dans le cas général (voir aussi [BR, KS, F]). La preuve de la conjecture du spectre quantique permet de donner une explication et une approche uniforme à ces formules. On a maintenant une autre conjecture importante et ouverte : l'existence d'une bijection entre toutes les valeurs propres et les solutions des équations de l'Ansatz de Bethe (conjecture de complétude).

**Remerciements** : je souhaite adresser mes remerciements à E. Ghys pour m'avoir encouragé à écrire cet article, à E. Frenkel et M. Jimbo pour notre collaboration et enfin à J. Dumont et P. Zinn-Justin pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce texte.

### Références

- [B1] R.J. Baxter, Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model, *Ann. Phys.* **70** (1971), 193–228.
- [B2] R.J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press Inc., London (1982).
- [BLZ] V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov et A.B. Zamolodchikov, Integrable structure of conformal field theory. II. Q-operator and DDV equation, *Comm. Math. Phys.* **190** (1997), 247–278.
- [BR] V.V. Bazhanov et N.Yu. Reshetikhin, Restricted solid on solid models connected with simply laced Lie algebra, *J. Phys. A* **23** (1990), 1477–1492.
- [CP] V. Chari et A. Pressley, Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [D1] V. Drinfel'd, Quantum groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987)
- [D2] V. Drinfel'd, A new realization of Yangians and of quantum affine algebras, *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 212–216.
- [EFK] P. Etingof, I. Frenkel and A. Kirillov, Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations, *Mathematical Surveys and Monographs* **58**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [F] E. Frenkel, Affine algebras, Langlands duality and Bethe ansatz, in Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris, 1994, ed. D. Iagolnitzer, pp. 606–642, International Press, 1995.
- [FH] E. Frenkel et D. Hernandez, Baxter's Relations and Spectra of Quantum Integrable Models, Prépublication arXiv :1308.3444
- [FR] E. Frenkel et N. Reshetikhin, The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of  $W$ -Algebras, in Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics, *Contemp. Math.* **248** (1999), 163–205.

- [H] D. Hernandez, Simple tensor products, *Invent. Math.* **181** (2010), 649–675.
- [HJ] D. Hernandez et M. Jimbo, Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions, *Compos. Math.* **148** (2012), no. 5, 1593–1623.
- [J] M. Jimbo, A  $q$ -difference analogue of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), no. 1, 63–69.
- [JM] M. Jimbo et T. Miwa, Algebraic analysis of solvable lattice models, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **85**, American Mathematical Society (1995).
- [K] V. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KS] A. Kuniba et J. Suzuki, Analytic Bethe Ansatz for Fundamental Representations of Yangians, *Comm. Math. Phys.* **173** (1995), 225–264.
- [N] H. Nakajima, Quiver varieties and  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 3, 1057–1097.
- [R] N. Reshetikhin, The spectrum of the transfer matrices connected with Kac–Moody algebras, *Lett. Math. Phys.* **14** (1987), 235–246.

---

DAVID HERNANDEZ, Sorbonne Paris Cité, Univ Paris Diderot, CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche UMR 7586, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France. • *E-mail* : [hernandez@math.jussieu.fr](mailto:hernandez@math.jussieu.fr)  
*Url* : [www.math.jussieu.fr/~hernandez](http://www.math.jussieu.fr/~hernandez)