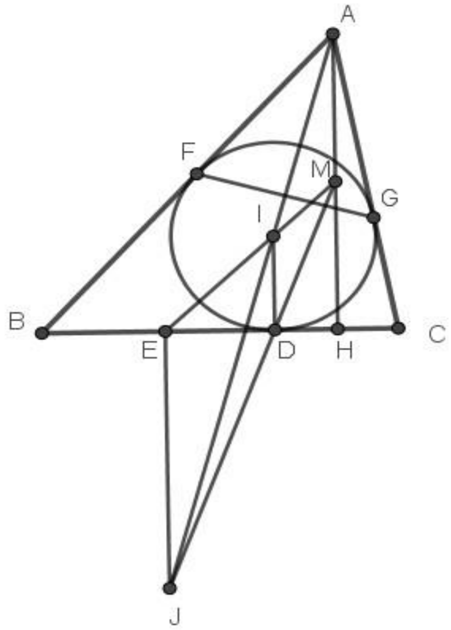

I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
D,F et G sont les points de contacts avec [BC], [AB] et [AC]

J est le centre du cercle exinscrit opposé à A et E le point de contact avec [BC]

(AH) est la hauteur et M est le milieu de [AH]

Il s'agit de prouver l'alignement de E, I et M et de J, D et M

ED = BD – BE = BD – CD = BF – CG = (BF + AF) – (CG + AG) = AB – AC

Egalités justifiées par l'égalité des bras de tangentes et une propriété classique des cercles inscrit et exinscrit.

Le théorème d'Al Kashi donne $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos(\widehat{ACB})$ et en remarquant $CH = AC.\cos(\widehat{ACB})$ on obtient $AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2BC.CH = BC(BC – 2CH)$

EH = EC – CH or EC = BD = (AB –AC +BC)/2d'où EH = (AB - AC + BC – 2CH)/2 = $((AB-AC)BC +AB^2-AC^2)/2BC$ =

= (AB – AC) (AB + AC +BC)/2BC = ED(AB + AC + BC)/2BC

Et alors EH/ED = (AB +AC +BC)/2BC

La somme des aires des 3 triangles IAB, IAC et IBC, de même hauteur ID est égale à l'aire de ABC donc

AH.BC = ID (AB + AC + BC) et comme HM = AF/2 on a HM/ID = (AB + AC + BC)/2BC = EH/ED

Les triangles EDI et EHM ont un angle égal (droit) entre deux côtés proportionnels : ils sont semblables avec l'égalité $\widehat{DEI} = \widehat{HEM}$ justifiant l'alignement E, I et M

On a DE/DH = IE/IM et les triangles IEJ et IMA étant semblables IE/IM = JE/AM = JE/HM

L'égalité DE/DH = JE/MH ainsi que $\widehat{DEJ} = \widehat{DHM}$ donne les triangles DEJ et DHM semblables et l'alignement J,D et H