Objectif: démontrer que la conjecture de Goldbach est une variante du crible d'Ératosthène Mais dans les congruences, selon un principe et une propriété bien connue.
*(« pour 30k > 30, il existe **y/y'** tels que 30k = **p*y + R** et p' = **p*y' + R => 30k-p'= p*(y – y')** donc **p** divise **30k – p'** et à l'inverse **p** ne divise pas cette différence, démonstration page 6 ci-après .»)*

Que l'interprétation de la comète de Goldbach est une erreur; c'est une boule de neige qui utilise la propriété récurrente du décalage d'un rang des congruences : ce qui permet de comprendre pourquoi le nombres de solutions qui vérifient 2n augmentent lorsque 2n tend ver ∞.
Goldbach indique que tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers. On veut utiliser la décomposition des multiples de 30 en deux nombres premiers selon les principes d'un crible. L'objectif est de montrer que ces nombres premiers particuliers forment l'ensemble des nombres premiers > 5.

La méthode du crible à utiliser suit la méthode d'Ératosthène, en utilisant les congruences de multiples de 30 (ci-dessous appelé 30k) modulo p, p $\leq \sqrt{2n}$ étant les nombres premiers définis ci-dessous qui vont cribler.
On crible de 1 à n et non de 1 à 2n

- ⇨ cinq parties à expliciter :

  1/ : comment on construit ce crible, algorithme de Goldbach.

  2/ : prouver que les nombres premiers ainsi trouvés forment l'ensemble des nombres premiers

  3/ : montrer que quelque soit un 30k, il est toujours décomposable en somme de deux premiers en utilisant une des 8 familles 30k + 2i , i ∈ {1,7,11,13,17,19,23,29} avec 30k ≥ 300. *Note: on peut montrer en utilisant simplement les entiers non nul ≥ 1.*

  4/ : montrer que l'on peut utiliser ce crible, à l'ensemble des entiers pairs en progression arithmétique de raison 30, selon des conditions particulières; afin d'obtenir une estimation minorée de couples premiers, qui décomposent un entier pair > 4 en somme de deux premiers.

  5/ : on montrera que ce crible a une propriété récurrente, le décalage d'un rang des congruences sur leur successeur, lorsque la limite 2n augmente de 2, ou en utilisant une famille pour la limite 30(k+1) + 2i; en la choisissant par rapport à la forme de n = 15k + i, la limite du criblage. «*Ce crible dans les congruences fera ressortir la famille complémentaire par rapport à 2n. Les nombres premiers q ont pour antécédent les entiers A≢ 2n[p]*»

  6/ : pour 3/ et 4/, on utilisera le Théorème des nombres premiers noté TNP et son corollaire, conséquence directe du TNP; où on en déduira une troisième fonction.

1/ : Le crible.

Le **<u>périmètre</u>** de travail du crible par famille: on travaille sur les entiers circonscrits aux familles suivantes qui seront appelé fam (i): («*en fonction de la forme de n=15k+i → 2n = 30k +2i, on fixe la famille.» Ce qui donnera la famille complémentaire par rapport à 2n, pas forcément la même. Par exemple si n = 15k +1 on a 2n = 30k+2 on a que trois fam(i) possible {1 ,13 ,19} , 1+31=32 et 13+19 = 32.*
*En fixant la **fam 13** on obtient les complémentaires **q ∈ fam 19** et pour la **fam 1; q ∈ fam 1** qui est la même**.»)***

fam(i)
- 30k+1
- 30k+7
- 30k+11
- 30k+13
- 30k+17
- 30k+19
- 30k+23
- 30k+29

L'intérêt de travailler avec ces huit familles est qu'elles permettent de réduire le nombre d'entiers naturels avec lesquels on travaille sans perte de généralité, puisque tout entier de forme 30k+x avec x n'appartenant pas à {1,7,11,13,17,19,23,29} n'est pas premier.

L'objectif est d'extraire de ces suites arithmétiques de raison 30, les nombres premiers supérieurs à 5 congrus à 1 [30] ou à p [30] avec p appartenant à {7,11,13,17,19,23,29}, et de décomposer les multiples de 30 +2i en somme de deux nombres premiers par l'utilisation des congruences.

Construction de l'algorithme AG, crible de Goldbach:

[«*Note: On peut construire directement le crible en partant de 1 et faire ressortir ses propriétés, en utilisant les nombres impairs représenté par des 1, les nombres pairs représenté par 0. Ainsi que les entiers qui seront congrus à 2n[p] noté A ≡ 2n[p].*

ex**: 0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11...etc et avec **p** ≥ 3. lorsqu'un nombre sera congru à **2n[p]** il serra remplacé par 0 ou marqué en rouge suivant les cas ci-dessous par pas de **p
***ex:** limite n =15 , 2n =30 et **p** ≤√2n = 3 et 5 le reste R de 2n par **p** = 0 et 0.*

On part toujours de l'indice du reste: (ici) **0** avec **p = 3** et on marque les entiers de 1 à 15 congruents à p d'un 0; suivant le principe d'Ératosthène **modulo p** ou par pas de **p**.
Si le reste R %2 = 0 on part de **p** puis += **2p .**
(*Ce qui est équivalent à marquer les multiples de **p** ∈ [n;2n], si ce n'est que l'on marque les entiers **A** congrus à **2n[p]** de **1** à **n***)

ex: liste à cribler **limite n = 15** [*0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11,0,13,0,15*] en rouge les A congruents à **p**
résultat (mod 3) ou (mod 2*3) [*0,1,0,0,0,**5**,0,**7**,0,0,0,**11**,0,**13**,0,0*] *les A ≡ 2n [3]*
résultat (mod 5) ou(mod 2*5) [*0,1,0,0,0,0,0,**7**,0,0,0,**11**,0,**13**,0,0*] *les A ≡ 2n [5]*

*Soit 3 couples **p'**+q qui décomposent 30. On en déduit directement une conséquence du TNP:*
*Comme on crible avec les nombres premiers **p** ≤ racine de **2n** , la fonction du nombre d'entiers **A** non congrus à 2n[p] noté A ≢ 2n [p]; devient [n / log 2n] ⇒ le nombre de nombres premiers q ∈ [n;2n].*

Montrons le décalage d'un rang des congruences sur leur successeurs impair en progression arithmétique de raison 2, permettant d'affirmer que la conjecture serra vérifiée pour la limite n+1 suivante.
*Propriété récurrente si un entier **A ≢ 2n[p]** précède un nombre premier **p'=A'+2 ,** alors **p'** qui serra donc **non congru à 2n[p]** vérifiera la conjecture pour la limite suivante **2n +2** suivant l'égalité ci après: **30 – A⇔ (30+2) – (A+2)***
Montrons:
Lorsque la limite n augmente de 1, et donc 2n augmente de 2 , cela n'a pas d'influence sur le nombre de premiers < (15+1) qui ne bougent pas.
Seul les congruences vont se décaler sur leur successeur A'+2.

***ex**: liste à cribler n+1 [0,**1**,0,3,0,5,0,7,0,9,0,11,0,13,0,15,0]*
*les restes de 32 par 3 et 5, augmente de 2. Donc l'égalité **30 – A⇔ (30+2) – (A+2) qui est la même**.*

***Par conséquent,** 1 qui était ≢ 2n [p] se reporte sur (1+2) ≢ (2n+2) [p] car **29** qui était un nombre premier q tel que 30 – 1 = 29 , serra toujours le même **sinon cela est contraire au TFA**.*
*D'où 3 serra ≢ (2n+2) [p] et tel que 32 – 3 = **29** donnera pour 2n +2 un couple p'+ q = 32 .!*

*vérification n = 15, **p = 3**, R =0 : [0,**1**,0,0,0,**5**,0,**7**,0,0,0,**11**,0,**13**,0,0]*
*résultat n+1=16, **p=3** et R=2 : [0,**1**,0,**3**,0,**0**,0,**7**,0,9,0, **0**, 0,**13**,0,0,0]*
a)** la non congruence de **1** se reporte sur **3,** celle de 3 qui était congru se reporte sur **5,** celle de **7** se reporte sur 9 et celle de 9 se reporte sur **11.
***b)** vérification n = 15, **p=5**, R =0 : [0,1,0,0,0,0,0,**7**,0,0,0,**11**,0,**13**,0,0]*
*résultat n+1=16, **p=5** et R=2 : [0,**1**,0,**3**,0,0,0,**0,**0,9,0, **0**, 0,**13**,0,0,0]*
*la non congruence de **1** se reporte sur **3,** celle de 5 c'est reporté sur **7, 7 et 32 ≡2[5], fin du crible.***

*On a 2 couples **3+29 et 13 +19** qui décomposent 32 et on constate bien que 23 qui est premier à pour antécédent 9 ≢ (2n+2) [p], si les congruences ne se décalaient pas d'un rang, il serait resté congru à (2n +2) [p] ce qui est absurde, car contraire au TFA et au TNP, ce qui garanti aussi la famille complémentaire!*

***Cela permet de garder** la propriété des entiers B ∈[n;2n]; si 2n – A = B est un multiple de p, (2n+2) – (A+2) = B serra toujours multiple de p; et inversement si 2n – A = **q** premier (2n+2) – (A+2) = **q** serra toujours premier.*

*Autre constat, **9** qui n'est pas premier mais qui précède **11** un nombre premier, **sa non** congruence se reportera sur 11 lors de la limite suivante n+1. Ce qui permet d'affirmer que pour 2n +2 +2 la conjecture serra encore vérifiée avec au minimum 34 – 11 = **23, qui a donc déjà été utilisé précédemment**, on commence à voir l'effet boule de neige.*

*On peut donc en déduire dès lors une troisième fonction caractérisée par cet algorithme, relative au TNP par rapport aux deux fonctions **π(n)**~[**n / log n**] indique ~ le nombre de premiers ≤ **n** et **G(n)** qui vaut ~ [**n / log 2n**] indique le nombre d'entiers **A** ≢ **2n[p]** ≤ **n** ⇔ nombre de premiers **q** ∈ **[n;2n].***

De ces deux fonctions on en déduira une troisième : $\frac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}$ *qui indiquera le nombre minimum de couples **p+q = 2n lorsque 2n → +** ∞*

Ce sont les même nombres premiers qui criblent, selon le même principe et ces deux algorithmes qui caractérisent les fonctions asymptotiques du TNP.

Pour n=15 on avait 4 entiers non congruent[p] et 3 couples de premiers : on pourrait donc aussi utiliser simplement G(n) sur le log de G(n) *au lieu de 14 ÷(ln 14×ln 28) = 1,592* pour les petites limite n.

*C'est à dire : pour **n -1**; **G(14)** vaut 14/ln 28 = 4,2 **A**≢ **2n[p]** qui est le nombres de **A**≢ **2n[p], premiers ou pas,** ce qui implique par conséquent et suivant la propriété **b)** ci-dessus, le résultat du nombre de couples pour la limite suivante **2n+2 =30 serra le nombre de A précédent un entier A'+2 = p'**, que l'on vient de vérifier on aura donc **4/ln 4 = 2** couples p'+q < 3 réels*

*Pour n+1 = 16 on **2** couples de premiers vérifieront 32 («15 / Ln 30 = 4,.. et 4/ln 4 =2,... ≤ **2**.»)*

*pour n+2 =17, p = 3 et 5; R = 1 et 4: donnera [0,1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,**11**,0,13,0,15,0,**17**] **4** couples de premiers p'+ q =34. («16 / Ln 32 = 4,.. et 4/ln 4 =2,... ≤ **4**.»)*

*pour n+3 = 18, sans vérifier, il est clair que l'on aura 4 couples p'+ q = 36 car on a bien 4 **A**≢ **2n[p]*** **qui précèdent p'. {3, 5, 11 et 15} et pourtant 15 n'est pas un P' ;** Autrement dit l'effet boule de neige, vient du fait que l'on ne tient pas compte uniquement des nombres premiers **A' = p' ≤ n**; mais des ***A**≢ **2n[p]** précédent les **A'.***

*Ce qui permet avec cette propriété du décalage des congruences de ne pas tenir compte de la primalité des A qui précèdent **p'**; mais simplement **du fait qu'ils sont non congruent à p.***

*Cette fonction caractérisée par le crible de Goldbach et aussi caractérisé par le TNP, car cela revient à cribler avec Ératosthène uniquement les entiers **A ≢2n[p]** pour la même limite !*
*Elle serra bien inférieur au nombre réel de couples qui décomposent 2n en somme de deux premiers lorsque la limite du crible **n → +** ∞.*

Comme on peut le vérifier le décalage des congruences se produit sur plusieurs limite n +k successives qui vérifieront la conjecture où au par avant, plusieurs limites n – k ont déjà vérifiées n + 2.

En fin de document on construit le programme pour cribler les entiers A impairs de 1 à n.

*Fin pour cette partie avec le crible dans les entiers A impairs en progression arithmétique de raison 2 ≤ n. **»]***

****

On va cribler dans les familles en progression arithmétique de raison 30:

On va utiliser le même principe, mais en calculant l'index de départ des nombres premiers p qui cribleront suivant la famille 30k+(i) noté fam(i) utilisé par rapport à n ≥150, en progression arithmétique de raison 15. Les entiers A de 1 à n sont en progression arithmétique de raison 30. Sont exclu les multiples de 2, 3 et 5.

Avec Ératosthène en début de programme on extrait les premiers **p** ≤ √**2n**
On établit un tableau de 1 (n//30).*
On calcul le reste R de 30k +2i par p.
puis si R %2=0 on ajoute p tel que R +p = j ; puis + 2p tant que j%30 est différent de fam (i)
si j%30==Fam(i) on calcul l'index tel que j//30 = idx.
Puis on crible de l'idx qui serra marqué 0, par pas de p → n // 30 en remplaçant les 1 par 0.
les 0 seront les entiers A ≡ 2n[p]; à la fin on compte les 1 qui sont les A ≢ 2n[p].

Ex: on fixe la limite **n = 15k** = 300, **la fam(i) = 7** progression arithmétique de raison 30 ;
les **A** seront représenté par des **1: A** ∈ [*7,37,67,97,127………277 < 300*]
tableau du crible n//30 **[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] p = 7,11,13,17** le **R** de 600 par **p = 5, 6, 2, 5**
on calcule **j = R +p si R%2=0 ,** sinon **R +=2p → j%30 = fam(i)=7**

p=7 , R =5 va donner → 5+14 , 19+14 →33, 47, 61,75, 89, 103, 117,131, 145, 159, 173, **187**==7%30,
on calcul l'index : idx = j//30 , 187 // 30 == 6. et on va cribler en partant de idx,« *attention on compte en commençant par 0 ,1 ,2 ,n...→ n//30* » on remplace le 1 par 0 puis par pas de 7 .
ce qui va donner → **[1,1,1,1,1,1,0,1,1,1]** puis *on réitère avec* ***p = 11, R = 6***
127 == j%30 → **[1,1,1,1,0,1,0,1,1,1]** puis *on réitère* ***. p = 13, R = 2,***
67 *== j%30 →* ***[1,1,0,1,0,1,0,1,1,1]*** *puis on réitère* ***. p = 17, R = 5*** *donnera 187 qui est déjà marqué,*
187== *j%30 →* ***[1,1,0,1,0,1,0,1,1,1]*** *fin on fait la somme des 1 = 7* ***A ≢ 2n[p] = 7*** *premiers* ***q∈[n;2n].***

Ératosthène pour la même limite et la même fam(i) donnera les nombres ***1= p'∈ [1,1,1,1,1,1,0,0,0,1] .***
En criblant le tableau d'Ératosthène avec le crible (G) → ***0 = A ≡2n [p]∈ : [1,1,0,1,0,1,0,1,1,1] ;***
ce qui donne le résultat suivant : nombre de ***,1,*** *couples* ***p'+q*** *= 600; 5 couples ∈ :* ***[1,1,1,1,1,1,0,0,0,1]***

La propriété récurrente est la même, lorsque ***n*** *ou* ***n+i*** *augmente de 15 les congruences se décalent d'un rang sur leur successeur* ***A+30. «****On a nul besoin de se soucier de la fam i complémentaire pour vérifier la conjecture, l'algorithme utilise les congruences et* ***q*** *a pour antécédent* ***A≢ 2n[P] .»***

Cela donnera par obligation le tableau suivant pour 2n = 630 ; ***4*** *couples, sans même avoir besoin de cribler:*

………………… …… ... *[****x,1,1,****1,****1,****1,0,0,0,****1****] seul le premier élément x est inconnu .*
résultat réel pour n= 315; vérifié :
Donnez N: 315; crible EG_2n_mod30*: [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]* ***4*** *couples p+q = 2n. Et ~ autant pour 2n = 660*
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1] réel ***6*** *couples*

Ce qui permet de prédire formellement que la conjecture serra vérifié pour la limite ***2n = 30(k+1) + 2i****; sans avoir besoin de cribler cette limite* **n = 15(k+1)+i.**

En effet: si **A≢ *2n[p]*** premier ou pas précèdent **A+30 premier p',** congru ou pas à **2n [p]** alors ce dernier, qui par obligation serra **non congruent à p,** il formera un couple: **p'** + q qui décompose **2n = 30(k+1) +2i** en somme de deux premiers !

Il devient donc avec d'autres raisonnements à l'appui, **impossible d'infirmer la conjecture** pour la limite **2n = 30(k+1) +2i.**

La fonction 2 du théorème de Goldbach est une conséquence directe du TNP: (log = *logarithme naturel)*
G(n): la fonction de compte du nombre de nombres ***A≢ 2n[p]*** ⇔ **q** ∈ **[n;2n]**

Corollaire: G(n) vaut ~ $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(\log 2n)}$

Le TNP dit que $\pi(n) = \frac{n}{(logn)} + o(\frac{n}{\log n})$, donc le nombre de nombres premiers dans $]n,2n]$ vaut

$$\pi(2n) - \pi(n) = \left(\frac{2n}{\log(2N)} - \frac{n}{\log N}\right) + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= n \times \left(\frac{2}{\log 2n} - \frac{1}{logn}\right) + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= n \times \frac{2\log n - \log(2n)}{\log(2n)\log n} + o(\frac{n}{\log n})$$

$$= \frac{n}{(\log 2n)} + o(\frac{n}{\log n})$$

*Tout nombre pair 2n ≥ 180 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers (**P**'+**q**)) appartenant à une famille Fam(i) tel que définie en début de document.*
Conséquence des deux fonctions du TNP on en déduit une troisième qui indique : que le nombre de A≢ 2n[P] qui précèdent un entiers A'= P'⇒ le nombre de couples P'+q = 2n est équivalent à

$$\frac{n}{(\ln(n) * \ln(2n))}$$ *lorsque n tend vers + ∞.*

Heuristiquement on peut aussi : pour n ≥ 3000 : $C_2 \frac{G(n)}{\ln G(n)}$ **;** où $C_2 \approx 1{,}320323\ldots$ constante premiers jumeaux.

** Un autre document explicite ce fonctionnement et sa résolution, avec les programmes relatif à ces deux algorithmes.*