RECHERCHES sur l'EXPONENTIATION des CARDINAUX

PRÉREQUIS

Le système d'axiomes dans lequel je me place est **ZF + AC**. Par contre, rien n'est présupposé en ce qui concerne l'hypothèse du continu, généralisée ou pas et la porte reste ouverte à toutes éventuelles futures découvertes d'ensembles, constructibles ou pas, dont le cardinal s'intercalerait strictement entre celui d'un quelconque autre ensemble et celui de son ensemble des parties.

Je ne considère a priori dans cet exposé que des cardinaux infinis.
Je m'appuie par ailleurs sur les pré-requis ci-dessous déjà établis :

(#A = # B) $\Leftrightarrow$ (il existe une bijection de A sur B)
(# A $\leq$ # B) $\Leftrightarrow$ (il existe une injection de A dans B)
tout ensemble de cardinaux est bien ordonné par la relation "$\leq$" définie ci-dessus
toute partie non vide d'un ensemble bien ordonné admet un plus petit élément
toute partie non vide d'un ensemble bien ordonné admet une borne supérieure
α et β étant des cardinaux infinis, ils admettent les règles d'arithmétique suivantes, à savoir :

pour tous cardinaux infinis α et β $\quad \alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$
pour tout cardinal infini α $\quad \alpha < 2^\alpha$ et $\alpha^\alpha = 2^\alpha$
tout ensemble infini de cardinal α admet α^α cad 2^α parties équipotentes à lui
et enfin : pour tous cardinaux α_i et β_i, et pour tout ensemble **I**,
si $\forall i \in I \ \alpha_i < \beta_i$, **alors** $\sum_{i \in I} \alpha_i < \prod_{i \in I} \beta_i$ (théorème de König)

On considère deux cardinaux α et β infinis avec la simple hypothèse : $\alpha < \beta$.
Il vient aussitôt : $2^\alpha \leq 2^\beta$.

Le but non évident de cette étude est de prouver **sans HCG** que $2^\alpha < 2^\beta$,
ou ce qui est équivalent que $\alpha^\alpha < \beta^\beta$,
ou encore au fait que si **A** et **B** sont des ensembles dont les ensembles des parties sont équipotents, alors ils le sont eux-mêmes.

RÉFLEXION sur HC et HCG

Il y a deux façons d'appréhender l'hypothèse du continu **HC** et sa généralisation **HCG**.

La première interprétation est :

pour HC : **« il n'existe pas de cardinal entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$ »**

et $\forall$**i** $\in \mathbb{N}$ **,** **pour HCG : « il n'existe pas de cardinal entre $\aleph_i$ et $\aleph_{i+1}$ »**

et par conséquent :

pour non HC : « il existe au moins un cardinal entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$ »

et $\forall$**i** $\in \mathbb{N}$ **,** **pour non HCG : « il existe au moins un cardinal entre $\aleph_i$ et $\aleph_{i+1}$ »**

Puisqu'à l'heure actuelle, on n'a jamais réussi à exhiber le moindre cardinal entre deux **"alef"** successifs, je comprends que l'on puisse privilégier cette première version.

La seconde interprétation est :

pour **HC** et **HCG** : **« il est impossible qu'il y ait un cardinal entre $\aleph_i$ et $\aleph_{i+1}$ »**

et donc:

pour **non HC** et **non HCG** : **« il est possible qu'il y ait un cardinal entre $\aleph_i$ et $\aleph_{i+1}$ »**

Cette seconde interprétation et en particulier sa négation paraît a priori beaucoup plus ouverte car elle laisse le champ libre à toutes les possibilités.

L'existence et la non existence d'un cardinal intermédiaire entre $\aleph_i$ et $\aleph_{i+1}$ restent toutes les deux des alternatives envisageables tout en sachant que la situation peut ne pas être identique pour tous les rangs **i** dans $\mathbb{N}$.

Opter pour HCG impose la même réponse pour tous les rangs **i** dans $\mathbb{N}$ et ferme des champs de recherche.

Par contre, opter pour **non HCG** avec la seconde interprétation autorise autant l'existence que la non existence de cardinaux intermédiaires. De plus, en cas d'existence, elle nous conduit à nous intéresser aux conséquences qui peuvent en résulter **.**

EXPOSÉ du RÉSULTAT FONDAMENTAL

Lemme 1 : pour tout cardinal $\boldsymbol{\alpha}$ infini **:** $\# \{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\alpha}\} = \boldsymbol{\alpha}$

c'est-à-dire que le cardinal de l'ensemble des cardinaux inférieurs ou égaux à un cardinal infini donné est égal à ce cardinal.

Justification

Pour évaluer la quantité de cardinaux qui sont inférieurs ou égaux à un cardinal $\boldsymbol{\alpha}$ infini donné, il suffit de remarquer que : $\sum_{\lambda \leq \alpha} 1 = \boldsymbol{\alpha}$

Corollaire : entre deux cardinaux $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ avec $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, il ne peut pas y avoir strictement plus de cardinaux que $\boldsymbol{\beta}$.

Théorème 1 : **Pour tous cardinaux infinis α et β , si α < β , alors $2^{\alpha} < 2^{\beta}$.**

Démonstration

Partons de deux cardinaux $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ infinis avec comme simple hypothèse : $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ **.**

Considérons deux ensembles **A** et **B** disjoints dont les cardinaux respectifs sont $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ **.**
Soit $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Il vient : $\# \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$
Les ensembles des parties $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ sont de cardinaux respectifs $\mathbf{2}^{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\mathbf{2}^{\boldsymbol{\beta}}$ **.**

Désignons par **I** l'ensemble des cardinaux inférieurs ou égaux à et $\boldsymbol{\alpha}$ et par **J** celui des cardinaux inférieurs ou égaux à $\boldsymbol{\beta}$.

D'après le lemme 1 : $\# \mathbf{I} = \boldsymbol{\alpha}$, $\# \mathbf{J} = \boldsymbol{\beta}$ **.** Et puisque $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ **,** on a $\mathbf{I} \subset_{\neq} \mathbf{J}$.

Nous allons définir un bon ordre sur **C** de la façon suivante :
Munissons tout d'abord sa partie **A** d'un bon ordre et indexons ses éléments **x** ainsi : $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, … . , $\mathbf{x_i}$, … avec $\mathbf{x_0} < \mathbf{x_1} < \mathbf{x_2} < , \dots , < \mathbf{x_i} < \mathbf{x_{i+1}} < \cdots$ **pour** $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$.
Complétons le bon ordre de **C** déjà établi pour sa partie **A** par un bon ordre sur **B** en décidant que l'élément minimum de **B** est un majorant strict de **A**.
Ainsi **B** majore globalement **A** . Les éléments **y** de **B** sont indexés ainsi : $\mathbf{y_0}$**,** $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, … . , $\mathbf{y_j}$, $\mathbf{y_{j+1}}$, …
avec $\mathbf{y_0} < \mathbf{y_1} < \mathbf{y_2} < , \dots , < \mathbf{y_j} < \mathbf{y_{j+1}} < \cdots$ pour $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ et de plus : $\forall\, \mathbf{i} \in \mathbf{I}$ **et** $\forall\, \mathbf{j} \in \mathbf{J}$, $\mathbf{x_i} < \mathbf{y_j}$.

Dans **A** , considérons l' élément minimum $\mathbf{x_0}$ et nommons $\mathbf{L_0}$ l'ensemble des parties de **A** qui contiennent $\mathbf{x_0}$.
Nommons ensuite $\mathbf{L_1}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{A} \setminus \{x_0\}$ qui contiennent $\mathbf{x_1}$,
puis $\mathbf{L_2}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{A} \setminus \{x_0, x_1\}$ qui contiennent $\mathbf{x_2}$,
puis par récurrence transfinie, $\mathbf{L_{i+1}}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{x_k}\, , \mathbf{k} \leq \mathbf{i}\}$ qui contiennent $\mathbf{x_{i+1}}$.

On a alors : $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) = \bigcup_{i \in I} \boldsymbol{L_i}$

si l'on pose $\boldsymbol{\lambda_i} = \#\, \mathbf{L_i}$, il vient $\#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) = \sum_{i \in I} \boldsymbol{\lambda_i}$ **(1)**

or : $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}\, , \boldsymbol{\lambda_i} \leq \boldsymbol{\alpha}$ et par conséquent $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}\, , \boldsymbol{\lambda_i} < \boldsymbol{\beta}$ **(2)**

d'autre part $\#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) = \mathbf{2^{\alpha}}$

Considérons maintenant une famille de cardinalité $\boldsymbol{\beta}$ d'ensembles $\mathbf{B_0}, \mathbf{B_1}, \dots, \mathbf{B_j}, \dots$ eux – mêmes de cardinalité $\boldsymbol{\beta}$, n'ayant deux à deux aucun élément commun, et indexés pour $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$. Cette famille admet une sous-famille de cardinalité $\boldsymbol{\alpha}$ avec les mêmes ensembles mais en limitant leur indexation à **I** .

On peut alors définir **:** $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ produit cartésien des $\mathbf{B_i}$ pour $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$ **soit** $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \prod_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{B_i}$

et $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ produit cartésien des $\mathbf{B_j}$ pour $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ **soit** $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \prod_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \mathbf{B_j}$

On a alors : $\#\, \boldsymbol{\mathcal{L}} = \prod_{i \in I} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta^{\alpha}}$ **(3)**

et : $\#\, \boldsymbol{\mathcal{M}} = \prod_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta^{\beta}} = \mathbf{2^{\beta}} = \#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{B})$ **(4)**

D'après le théorème de König et avec **(1)** **(2)** et **(3)** et puisque les $\boldsymbol{\lambda_i}$ sont strictement inférieurs à $\boldsymbol{\beta}$, **(2)** on a :

$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \boldsymbol{\lambda_i} < \prod_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \boldsymbol{\beta}$ soit $\#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) < \#\, \boldsymbol{\mathcal{L}}$ **(5)**

de plus puisque $\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$ $\prod_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \boldsymbol{\beta} \leq \prod_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \boldsymbol{\beta}$ soit $\#\, \boldsymbol{\mathcal{L}} \leq \#\, \boldsymbol{\mathcal{M}}$ **(6)**

d'où d'après **(5)** et **(6) ,** $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \boldsymbol{\lambda_i} < \prod_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \boldsymbol{\beta}$ soit $\#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) < \#\, \boldsymbol{\mathcal{M}}$ **(7)**

et enfin d'après **(4)** : $\#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) < \#\, \boldsymbol{\mathcal{M}} = \#\, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{B})$ **(8)**

c'est-à-dire : $\mathbf{2^{\alpha}} < \mathbf{2^{\beta}}$

Il semble donc que l'on ait bien prouvé que : $\boxed{\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \;\Rightarrow\; \mathbf{2^{\alpha}} < \mathbf{2^{\beta}}}$ **(9)**

Corollaires (9a) à (12)

$\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ jouant des rôles symétriques, la contraposée de **(9)** donne immédiatement le corollaire suivant qui constitue une règle de simplification importante dans l'arithmétique des cardinaux :

$$\boxed{\mathbf{2^{\alpha}} = \mathbf{2^{\beta}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}} \qquad \textbf{(9a)}$$

ou ce qui revient au même

$$\boxed{\alpha^\alpha = \beta^\beta \Rightarrow \alpha = \beta} \qquad \textbf{(9b)}$$

et enfin

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \sim B} \qquad \textbf{(9c)}$$

dans ce cas on a même $\alpha^\alpha = \beta^\beta \Rightarrow \alpha^\alpha = \alpha^\beta = \beta^\alpha = \beta^\beta$

De même, on peut déduire facilement la réciproque de (9)

$$\boxed{2^\alpha < 2^\beta \Rightarrow \alpha < \beta} \qquad \textbf{(10)}$$

En effet, à partir de $2^\alpha < 2^\beta$, il suffit d'envisager successivement chacune des trois conclusions possibles $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, et $\alpha < \beta$ pour s'apercevoir que seule la troisième ne conduit pas à une contradiction.

Finalement, en combinant (9) et (10)

$$\boxed{2^\alpha < 2^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta} \qquad \textbf{(11)}$$

et d'après (9b)

$$\boxed{2^\alpha = 2^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta} \qquad \textbf{(12)}$$

Conséquence :

Si l'on accepte l'idée qu'il puisse exister un cardinal α strictement compris entre deux cardinaux "**alef**" successifs λ_i *et* λ_{i+1} , alors il en existe un autre, à savoir 2^α qui se trouve strictement compris entre λ_{i+1} et λ_{i+2} .

Plus généralement, s'il existe γ tel que $\alpha < \gamma < \beta$, alors $2^\alpha < 2^\gamma < 2^\beta$.
