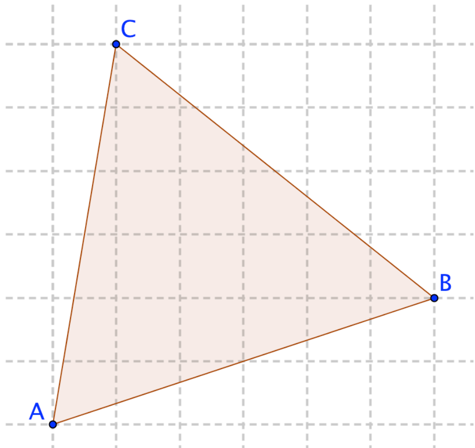
Petite énigme pour élèves du « cours facultatif Euler »

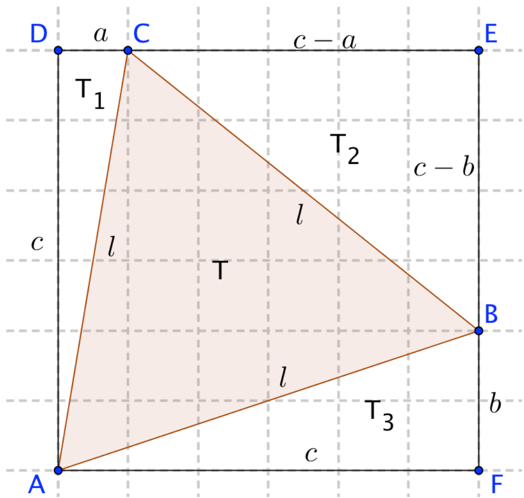
Est-il possible de placer un triangle équilatéral sur un réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de points (orthonormé), comme dans le croquis ci-dessous.

Si oui comment ? Sinon, pourquoi ?



Démonstration (par 'descente infinie avortée').

- Imaginons que cela soit possible et essayons de prouver que cela entraînerait une contradiction, ce que l'on appelle « une preuve par l'absurde ».
- Comme les coordonnées sont des nombres entiers on peut sélectionner parmi toutes les solutions éventuelles celle dont le côté l du triangle équilatéral T est minimal.
- Inscrivons notre triangle équilatéral T dans un rectangle R.
- Il est évident que les 3 sommets de T ne peuvent pas coïncider avec 3 sommets du rectangle R (Justifier pourquoi).
- De même, il n'est pas possible que 2 sommets de T coïncident avec 2 parmi ceux de R (Justifier pourquoi).



- Supposons alors qu'un seul sommet A coïncide avec un sommet de R et définissons a, b et c comme dans le croquis ci-contre.
- Par le théorème de Pythagore $a = b$, puisque T_1 et T_3 ont même hypoténuse et un côté de même longueur c.
- Par minimalité de la solution T, a et c ne peuvent avoir de diviseur commun d autre que 1. Sinon d diviserait l^2 (par T_1) qui impliquerait que d diviserait $a = b$ et c et donc la solution ne serait pas minimale.
- Or, par Pythagore sur les triangles T_1 et sur T_2 on $(c-a)^2 + (c-a)^2 = l^2 = a^2 + c^2$, qui développée, puis réduite donne $c^2 = (4c - a)a$. Mais alors, c et a ne sont pas premiers entre eux, car un diviseur premier de c diviserait forcément a. D'où contradiction !