Exercice 1.—(Distorsion d'un noeud)

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une application ℓ-périodique, de classe C^1. On dit que l'image de γ est une courbe fermée. On suppose que $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout réel t, autrement dit la courbe est parcourue à vitesse constante égale à 1. On définit alors la distorsion de γ comme le nombre

$$\delta(\gamma) = \sup \left\{ \frac{|s-t|}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ tels que } |s-t| \leq \frac{\ell}{2} \right\}.$$

Autrement dit, la distorsion est le plus grand rapport entre la distance entre deux points de la courbe, le long de la courbe, et la distance entre ces même points dans $\mathbb{R}^3$ ("à vol d'oiseau").

Le but de l'exercice est de montrer un résultat de Mikhaïl Gromov paru dans un livre de 1981 : *la distorsion d'une courbe est toujours au moins égale à* $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que la distorsion d'un cercle vaut bien $\frac{\pi}{2}$.

On introduit la fonction $r(s) := \left\|\gamma(s + \frac{\ell}{2}) - \gamma(s)\right\|$, et le vecteur unitaire indiquant la direction entre les points $\gamma(s)$ et $\gamma(s + \frac{\ell}{2})$,

$$u(s) = \frac{1}{r(s)} \left(\gamma \left(s + \frac{\ell}{2} \right) - \gamma(s) \right).$$

Cette formule définit une application ℓ-périodique de $\mathbb{R}$ dans la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, autrement dit une courbe fermée sur la sphère.

2. Donner une minoration de $r(s)$ à l'aide de $\delta(\gamma)$. On numérote (1) cette inégalité.

3. Comparer $u(\frac{\ell}{2})$ et $u(0)$. En déduire que la longueur de la courbe u,

$$L(u) := \int_0^\ell \|u'(t)\| \, dt$$

est supérieure ou égale à 2π. On numérote (2) cette inégalité. (On pourra admettre qu'une courbe joignant deux points antipodaux sur la sphère unité a une longueur au moins égale à π).

4. Dériver la relation $\|u(s)\| = 1$ pour montrer que les vecteur $u(s)$ et $u'(s)$ sont orthogonaux.

5. Calculer $u'(s)$. En utilisant le théorème de Pythagore (et la question précédente), en déduire que

$$\|u'(s)\| \leq \frac{2}{r(s)} \quad (3).$$

6. Conclure, à l'aide de (1), (2) et (3).

Cet exercice accompagne un article paru sur le site Images des mathématiques sous le titre Des Noeuds indétordables.