Ejercicio: distorsión de un nudo

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\nvDash}$ una aplicación ℓ-peridica de clase C^1. Decimos que la imagen de γ es una curva cerrada. Suponemos que $\|\gamma'(t)\| = 1$ para todo real, es decir, que la curva se recorre a velocidad constante igual a 1. Definimos entonces la distorsión de γ como el número

$$\delta(\gamma) := \sup \left\{ \frac{|s-t|}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|} : s, t \text{ tales que } |s-t| \leq \frac{\ell}{2} \right\}.$$

En otras palabras, la distorsión es el supremo de los valores de los cocientes entre la distancia de dos puntos de la curva medida a lo largo de la curva y la distancia entre esos mismos dos puntos medida en $\mathbb{R}^3$. El objetivo de este ejercicio es probar un resultado de Mikha'il Gromov aparecido en un libro de 1981: la distorsión de una curva es siempre mayor o igual que $\pi/2$.

1.- Probar que la distorsión de un círculo es igual a $\pi/2$.

Introduzcamos la función $r(s) := \|\gamma(s + \ell/2) - \gamma(s)\|$, así como el vector unitario $u(s)$ que sigue la dirección de $\gamma(s)$ a $\gamma(s + \ell/2)$:

$$u(s) := \frac{1}{r(s)} \Big(\gamma(s + \ell/2) - \gamma(s) \Big).$$

Esta fórmula define una aplicación ℓ periódica de $\mathbb{R}$ en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$, es decir, una curva cerrada sobre la esfera.

3.- Establezca una minoración de $r(s)$ a partir de $\delta(\gamma)$.

2.- Compare $u(\ell/2)$ con $u(0)$. Deduzca que la longitud $L(u)$ de la curva u, a saber,

$$L(u) := \int_0^\ell \|u'(t)\| \, dt,$$

es mayor o igual que 2π (se puede admitir como conocido que una curva que une dos puntos antipodales de la esfera unitaria tiene una longitud al menos igual a π).

4.- Derive la relación $\|u(s)\| = 1$ para mostrar que $u(s)$ y $u'(s)$ son ortogonales.

5.- Calcule $u'(s)$. Usando el teorema de Pitágoras, deduzca que

$$u'(s) \leq \frac{2}{r(s)}.$$

6.- Concluya con la ayuda de las estimaciones obtenidas.