

Marche aléatoire de fourmis sur un arbre

Dana Léo

Ce rapport regroupe mon travail de recherche dans le cadre de mon stage de L3 à l'Université d'Aix-Marseille sous la direction de Bruno Schapira.

Il traite du sujet des marches aléatoires de fourmis sur un graphe comme présenté dans les articles [1] et [2]. On se donne un graphe G dont on note un nœud N et un autre F . Les arêtes du graphes G possèdent des poids représentant le nombre de phéromones présentes qui aident la fourmi à s'orienter lors de son parcours du graphe. On fait partir une fourmi de N et elle effectue une marche aléatoire jusqu'à arriver en F , ce qui arrive presque sûrement. La fourmi emprunte les arêtes avec une probabilité proportionnelle au poids de l'arête. On s'intéresse ici au comportement asymptotique des poids du graphe, et donc des fourmis pour plusieurs modèles et types de graphes discuté en introduction. Le résultat principal de ce stage est démontré en partie 2 et concerne directement les modèles de [1]. Le reste des parties présente d'autres modèles vu au cours du stage.

Je tiens à remercier mon maître de stage Mr Schapira pour m'avoir aiguillé dans ce travail de recherche et m'avoir apporté sa connaissance dans le domaine, ainsi que l'équipe du laboratoire de mathématiques pour son accueil chaleureux en dépit de la crise sanitaire. (Merci aussi à Flora, avec qui je partageais mon stage, pour m'avoir supporté 6 semaines.)

Table des matières

1	Introduction du modèle	2
1.1	Définitions	2
1.2	Rappel des résultats des travaux précédents	3
2	Densité des arêtes d'un arbre	4
2.1	Procédé de Rubin	4
2.2	Preuve du théorème 2.1	10
2.3	Discussion sur la généralisation	13
3	Marche de fourmis pour des poids non-linéaire	13
3.1	Urne de Polya non-linéaire	13
3.2	Limite des poids normalisés lors de non-linéarité	14
4	Modèle de Diffusion de Nourriture	16

5	Cas des graphes à distance 1	18
6	Cas du graphe triangulaire à deux nids	19
7	Bibliographie	20

1 Introduction du modèle

1.1 Définitions

Commençons par définir le modèle général de marche aléatoire de fourmis. Pour un graphe $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des nœuds de G et E de ses arêtes, on numérote deux nœuds distincts N et F et on attribue à chaque $e \in E$ un poids $W_e(n)$, où n est le nombre de fourmis ayant marchées sur le graphe, on note aussi $w_e(n) = \frac{W_e(n)}{n}$ son poids normalisé.

J'appelle *marche d'une fourmi sur G* à l'instant n , le fait de faire marcher une fourmi aléatoirement de N à F , et de renforcer un chemin de N à F selon un algorithme spécifié. Cette marche part de N et à chaque noeuds A , la probabilité de prendre l'arête e est $\frac{W_e(n)}{\sum_{f \sim A} W_f(n)}$, où $f \sim A$ si et seulement si f est une arête dont l'un des bouts est A .

J'appelle *processus de fourmis sur G* la suite aléatoire de l'ensemble des poids normalisés des arêtes de G aux instants n , où entre n et $n+1$ les poids de g sont renforcés par la marche d'une fourmi avec un certains algorithme de renforcement spécifié.

Par défaut, à l'instant initial tout les poids valent 1. Nous reviendrons sur cette hypothèse dans la partie 4.

Je note $H(n)$ l'évènement que le sous-graphe H de G soit renforcé lors de la n -ième marche.

Décrivons à présent les différents algorithmes possibles pour le renforcement des poids du graphe proposé dans [1] et [2] :

- l'algorithme de *Retour Sans Boucle* (ou RSB) est le seul utilisé dans ce rapport. Il s'agit de prendre le chemin effectué par la fourmi en évitant les boucles effectuées à l'aller. Ainsi, on part de F et on remonte vers les noeuds empruntés en prenant toujours l'arête qui est la première à avoir menée la fourmi où elle est. Une description mathématique exacte est donnée dans [1]

- l'algorithme de *Plus Court Chemin* (ou PCC) qui augmente le poids des noeuds en prenant le plus court chemin dans le sous-graphe de G des noeuds empruntés par la fourmi, où la distance est celle du nombre d'arêtes. S'il y a plusieurs plus court chemin, on en choisit un au hasard uniformément.

- l'algorithme *Aller* qui renforce le poids de toutes les arêtes empruntées par la fourmi (ce renforcement n'est fait qu'après que la fourmi soit arrivée en F , ce n'est donc pas une marche aléatoire renforcée).

Le renforcement des arêtes s'effectue linéairement : si e est renforcée à l'instant $n+1$, alors $W_e(n+1) = W_e(n) + 1$. Nous changerons ceci dans la partie 3 au profit d'un renforcement non-linéaire.

Introduisons à présent les types de graphes étudiés :

- *un graphe Série-Parallèle* (ou SP) est un graphe construit récursivement à partir d'une arête simple, et avec les deux schémas : de *mise en série* où pour G_1 et G_2 graphes SP, on fusionne F_1 et N_2 , de *mise en parallèle* où pour G_1 et G_2 graphes SP, on fusionne N_1 et N_2 , et F_1 et F_2 .

- *un arbre* est un graphe SP spécial : c'est un arbre classique pour lequel on fusionne toutes les feuilles que l'on note F, et où la racine est N. Pour ne pas avoir à introduire un type de marche à plusieurs nourriture F on fusionne en fait tout les noeuds F, car les processus sont alors strictement équivalents.

- un graphe est dit *géodésique* si entre N et F, toutes les arêtes appartiennent à un plus court chemin de N à F, plus court au sens du nombre d'arêtes parcourues. La notation G_{geo} désigne le sous-graphe géodésique de G. On nomme *hauteur géodésique* d'un graphe la taille du plus court chemin du graphe.

On définit enfin la *conductance* d'un graphe SP. Pour G graphe SP, on note C_G sa conductance définit récursivement comme :

- si G est simplement une arête e , alors $C_G = W_e$
- si G est la mise en parallèle de G_1 et G_2 , alors $C_G = C_{G_1} + C_{G_2}$
- si G est la mise en série de G_1 et G_2 , alors $C_G = \frac{1}{\frac{1}{C_{G_1}} + \frac{1}{C_{G_2}}}$

1.2 Rappel des résultats des travaux précédents

Dans cette section, je rappelle des résultats utiles des travaux précédents, en particulier de [1], sur les graphes SP et sur les conductances.

Théorème 1.1 :

Pour G un graphe SP sur lequel on effectue un processus de fourmis, on a $\forall e \in E$, $w_e(n) \rightarrow X_e$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, où X_e est une variable aléatoire différente de 0 presque sûrement si et seulement si $e \in G_{geo}$, et vaut 0 presque sûrement sinon.

Proposition 1.2 :

Pour G un graphe SP de hauteur géodésique h , on a $C_G(n)$ croissante et $C_G(n) \in [\frac{n-n^\alpha K}{h}; \frac{n+c}{h}]$, où c est une constante de G, K une variable aléatoire presque sûrement finie, et $\alpha = \frac{h}{h+1}$.

En particulier on a asymptotiquement $C_G(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{h}$.

Proposition 1.3 :

Pour G un graphe SP formé de H_1 et H_2 en parallèle sur lequel on effectue un processus de fourmis, alors on a

$$P(H_1(n)) = \frac{C_{H_1}(n)}{C_{H_1}(n) + C_{H_2}(n)}.$$

2 Densité des arêtes d'un arbre

Dans cette partie, je me concentre sur la preuve du théorème 2.1, portant sur la densité des arêtes d'un arbre après un processus de fourmis.

Théorème 2.1 :

Pour G un arbre sur lequel on effectue un processus de fourmis, on a $\forall e \in E$, $w_e(n) \rightarrow X_e$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, où X_e est une variable aléatoire à densité ou vaut 1 presque sûrement si et seulement si $e \in G_{geo}$, et vaut 0 presque sûrement sinon. On peut donner les seuls cas où le poids normalisé limite peut valoir 1, qui est si et seulement si, l'arête se trouve entre N et le premier noeuds non-uniaire de G_{geo} .

Ce théorème vient compléter le Théorème 1.1 dans le cas des arbres en donnant une caractéristique plus précise sur la loi limite des poids normalisés des arêtes.

En fin de partie, je décrirais les raisons pour lesquelles l'extension de ce théorème au cas des graphes SP pose problème.

2.1 Procédé de Rubin

Je vais ici décrire le procédé de Rubin [3] sur des urnes de Polyà qui va nous être utile pour mieux comprendre le comportement de ces urnes.

On considère une urne de Polyà à deux couleurs, Rouge et Bleu, commençant avec une boule rouge et une bleue. On définit les suites de variables R_n et B_n qui comptent le nombre de boules dans l'urne avec donc $R_0 = B_0 = 1$.

La probabilité de piocher un boule rouge à l'instant n est $\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n + 1) = p_R(n)$. Soit (X_i) et (Y_i) suites de variables aléatoires avec les (X_i) indépendants des (Y_i) . On a $p_R(n) = \frac{X_{R_n}}{X_{R_n} + Y_{B_n}}$, ce qui rend le processus différent d'une urne de Polyà simple, car ici la probabilité de piocher une boule d'une couleur dépend non-linéairement du nombre de boules de la couleur.

Le procédé de Rubin consiste à simuler le même tirage en décorrélant le tirage des boules bleus de celui des rouges. Pour se faire, on pose :

- des variables aléatoires Z_i^* et W_i^* , *iid* de loi $\exp(1)$. On pose alors $Z_i = \frac{Z_i^*}{X_i}$ et $W_i = \frac{W_i^*}{Y_i}$ qui sont par lemme des coalitions deux familles de variables aléatoires indépendantes, de loi respectives $\exp(X_i)$ et $\exp(Y_i)$.

- $T_R(n) = \sum_{i=1}^n Z_i$ avec $T_R(0) = 0$ et de même pour $T_B(n)$ avec les W_i ,

- $R(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(T_R(i) \leq t)}$ et $B(t)$ de même.

Ici, la fonction $R(t)$ simule le tirage des boules rouges de l'urne, on va en piocher une dès que le temps t est plus grand que Z_1 , puis $Z_1 + Z_2$, etc. Le résultat est qu'à tout temps t la probabilité que la prochaine boule piochée soit une boule rouge plutôt qu'une bleue est $P_R(t) = \frac{X_{R(t)}}{X_{R(t)} + Y_{B(t)}}$ par la propriété

d'être sans mémoire des variables exponentielles (Z_i) et (W_i) . La preuve de cette propriété est faite dans [3]. Ceci modélise bien l'urne de Polyà précédente.

On se place maintenant dans le cas où les (X_i) et (Y_i) ont les mêmes propriétés que la conductance dans la proposition 1.2, pour un certains $h \in \mathbb{N}^*$, avec X_1 et Y_1 presque sûrement constante égale à 1. On suppose de plus que $\frac{R_n}{n}$ converge presque sûrement vers $r \in]0; 1[$ une variable aléatoire lorsque $n \rightarrow +\infty$, et de même avec $\frac{B_n}{n} \rightarrow b$.

Proposition 2.2 :

$p_R(n) \rightarrow r$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que la probabilité de piocher une boule tend vers la proportion de boules dans l'urne.

Démonstration. 2.2 :
On écrit

$$p_R(n) = \frac{X_{R_n}}{X_{R_n} + Y_{B_n}} = \frac{R_n \frac{X_{R_n}}{R_n}}{R_n \frac{X_{R_n}}{R_n} + B_n \frac{Y_{B_n}}{B_n}} = \frac{\frac{R_n}{n} \frac{X_{R_n}}{R_n}}{\frac{R_n}{n} \frac{X_{R_n}}{R_n} + \frac{B_n}{n} \frac{Y_{B_n}}{B_n}}$$

Or on a $\frac{R_n}{n} \rightarrow r$, $\frac{B_n}{n} \rightarrow b$, $X_n \sim \frac{n}{h}$ et $Y_n \sim \frac{n}{h}$, donc presque sûrement :

$$p_R(n) \rightarrow \frac{r}{r+b} = r$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ce qui conclut la preuve. □

Proposition 2.3 :

$P_R(t) \rightarrow r$ presque sûrement lorsque $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que la simulation de l'urne par le processus de Rubin a bien la même limite que le processus de Polyà normal.

Démonstration. 2.3 :

Soit $I_n = [T_R(R_n - 1); T_R(R_{n+1} - 1)[\cap [T_B(B_n - 1); T_B(B_{n+1} - 1)[$.

Montrons que les (I_n) sont deux à deux disjoints et recouvrent presque sûrement \mathbb{R}_+ .

On a :

$$I_n \cap I_k = [T_R(R_n - 1); T_R(R_{n+1} - 1)[\cap [T_R(R_k - 1); T_R(R_{k+1} - 1)[\cap [T_B(B_n - 1); T_B(B_{n+1} - 1)[\cap [T_B(B_k - 1); T_B(B_{k+1} - 1)[\quad (1)$$

Or $[T_B(B_n - 1); T_B(B_{n+1} - 1)[\cap [T_B(B_k - 1); T_B(B_{k+1} - 1)[$ est non vide si et

seulement si $B_n = B_k$. De même pour l'intervalle avec des R . Ainsi $I_n \cap I_k$ non vide si et seulement si $R_n = R_k$ et $B_n = B_k$, ce qui équivaut à $n = k$ car $B_n + R_n = n + 2$. On a donc bien que les I_n sont disjoints. De plus :

$$\bigcup_{i=0}^n I_n = \left(\bigcup_{i=0}^n [T_R(R_n - 1); T_R(R_{n+1} - 1)[\right) \cap \left(\bigcup_{i=0}^n [T_B(B_n - 1); T_B(B_{n+1} - 1)[\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=0}^n [T_R(R_n - 1); T_R(R_{n+1} - 1)[&= [T_R(R_0 - 1); T_R(R_{n+1} - 1)[\\ &= [T_R(0); T_R(R_{n+1} - 1)[\\ &= [0; T_R(R_{n+1} - 1)[\end{aligned} \tag{2}$$

Finalement on a, en utilisant (2) ainsi que son analogue avec B_n , que

$$\bigcup_{i=0}^n I_n = [0; \min(T_R(R_{n+1} - 1); T_B(B_{n+1} - 1))]$$

On pioche presque sûrement une infinité de boules de chaque couleur car on a $R_n \sim nr$ et $B_n \sim nb$ par hypothèse, avec $r, b > 0$. Enfin, on a

$$\mathbb{E}(T_R(n)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i) = \sum_{i=1}^n X_i^{-1} \sim h \log(n)$$

et de même pour B , donc finalement, $\min(T_R(R_{n+1} - 1); T_B(B_{n+1} - 1))$ tend vers $+\infty$ presque sûrement.

Donc $\bigcup_{i=0}^n I_n = \mathbb{R}_+$ presque sûrement.

Pour $t \in I_n$, on a $R(t) = R_n$ et $B(t) = B_n$, donc $P_R(t) = p_R(n)$. Ainsi, comme les (I_n) recouvrent \mathbb{R}_+ , $P_R(t)$ est constant par morceaux et sa limite est la même que celle de $p_R(n)$. On a donc bien $P_R(t) \rightarrow r$ presque sûrement, ce qui conclut la preuve. □

On a donc que $\frac{R(t)}{B(t)} = \frac{P_R(t)}{P_B(t)} \rightarrow \frac{r}{b}$ presque sûrement lorsque $t \rightarrow +\infty$. On cherche à présent à montrer que la variable aléatoire limite est à densité. Comme on peut prendre une suite extraite de $\frac{R(t)}{B(t)}$ puisqu'elle converge presque sûrement, on peut prendre une suite extraite de $\frac{R(t)}{B(t)}$ puisqu'elle converge presque sûrement si l'on prouve la proposition suivante. Le lemme 2.5 sert lui à simplifier la preuve de la proposition 2.4.

Proposition 2.4 :

$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall a \geq 0, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{B(h \log(n))} \in [a; a + \varepsilon]\right) \leq C\varepsilon$

Lemme 2.5 :

$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall a \geq 0, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{n} \in [a; a + \varepsilon]\right) \leq C\varepsilon$

Démonstration. 2.4 :

Commençons par réécrire cette probabilité en profitant de l'indépendance des variables aléatoires $\frac{R(h \log(n))}{n}$ et $\frac{B(h \log(n))}{n}$ par lemme de coalition avec les familles (Z_j) et (W_j) .

Soit $P(n, a, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{B(h \log(n))} \in [a; a + \varepsilon]\right)$

On a $P(n, a, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{n} \in \left[a \frac{B(h \log(n))}{n}; (a + \varepsilon) \frac{B(h \log(n))}{n}\right]\right)$

On conditionne selon la valeur de $\frac{B(h \log(n))}{n}$:

$$P(n, a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{n} \in [ax; ax + \varepsilon x]\right) \mathbb{P}\left(\frac{B(h \log(n))}{n} = x\right) dx$$

Avec le lemme 2.5 on à la fin de la preuve : ceci permet de conclure car

$$P(n, a, \varepsilon) \leq \varepsilon C \int_0^{+\infty} x \mathbb{P}\left(\frac{B(h \log(n))}{n} = x\right) dx = \varepsilon C \mathbb{E}\left(\frac{B(h \log(n))}{n}\right)$$

et car on a $\mathbb{E}\left(\frac{B(h \log(n))}{n}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_R(i) < h \log(n))}{n}$

Or on a déjà vu que $\mathbb{E}(T_R(n)) \sim h \log(n)$, donc lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $\mathbb{E}(T_R(2n)) \sim h \log(2n) \geq h \log(n)$. Donc pour tout $k \geq 2n$ on a $\mathbb{P}(T_R(k) < h \log(n)) = 0$. Ainsi, $\mathbb{E}\left(\frac{B(h \log(n))}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=0}^{2n-1} \mathbb{P}(T_R(i) < h \log(n))}{n} \leq 2$, d'où

$$P(n, a, \varepsilon) \leq 2C\varepsilon$$

Finalement, on trouve bien $C > 0$ tel que $P(n, a, \varepsilon) \leq 2C\varepsilon$, ce qui conclut la preuve de la proposition 2.4. □

Démonstration. 2.5 :

Réécrivons encore la probabilité $P^*(n, a, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{R(h \log(n))}{n} \in [a; a + \varepsilon]\right)$

On a $\frac{R(h \log(n))}{n} \in [a; a + \varepsilon]$ si et seulement si $T_R(\lceil an \rceil) \leq h \log(n)$ et $T_R(\lfloor an + \varepsilon n \rfloor) > h \log(n)$. En conditionnant par la valeur de $T_R(\lceil an \rceil)$, on obtient :

$$P^*(n, a, \varepsilon) = \int_0^{h \log(n)} \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) dx$$

avec $\chi(n, a, \varepsilon) = T_R(\lfloor an + \varepsilon n \rfloor) - T_R(\lceil an \rceil)$.

On va majorer cette intégrale en la découpant en deux parties.

On commence avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) \\
&\leq \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x) \\
&\leq \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) - \xi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - \xi(n, a, \varepsilon) - x) \\
&\leq \frac{V(n, a, \varepsilon)}{(h \log(n) - \xi(n, a, \varepsilon) - x)^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

Où on a $\xi(n, a, \varepsilon) = \mathbb{E}(\chi(n, a, \varepsilon))$ et $V(n, a, \varepsilon) = \mathbb{V}(\chi(n, a, \varepsilon))$.

Pour tout $x < x_n = h \log(n) - \xi(n, a, \varepsilon) + \sqrt[4]{V(n, a, \varepsilon)}$, on a :

$$\mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) \leq \sqrt[2]{V(n, a, \varepsilon)}$$

Calculons à présent $V(n, a, \varepsilon)$, puis $\xi(n, a, \varepsilon)$:

$$V(n, a, \varepsilon) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} Z_i\right) = \sum_{i=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} \sum_{j=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} cov(Z_i, Z_j)$$

On observe qu'en revenant à la définition des Z_i on a $cov(Z_i, Z_j) = cov\left(\frac{1}{X_i}, \frac{1}{X_j}\right)$, d'où :

$$V(n, a, \varepsilon) = \sum_{i,j=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} cov\left(\frac{1}{X_i}, \frac{1}{X_j}\right)$$

En se rappelant des propriétés de X_i , et pour n assez grand on a $\frac{1}{X_i} = \frac{h}{i+O(i^\alpha)} = \frac{h}{i} + O\left(\frac{1}{i^{2-\alpha}}\right)$ où $1 > \alpha > 0$. Donc $cov\left(\frac{1}{X_i}, \frac{1}{X_j}\right) = (O\left(\frac{1}{i^{2-\alpha_j}} + \frac{1}{j^{2-\alpha_i}}\right))$. Ainsi, pour n assez grand on a $cov\left(\frac{1}{X_i}, \frac{1}{X_j}\right) \leq \frac{K}{j^{2-\alpha_i}} + \frac{K}{i^{2-\alpha_j}}$, avec K constante positive. Par symétrie de la somme, on trouve alors :

$$V(n, a, \varepsilon) \leq 2K \left(\sum_{i=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} \frac{1}{j^{2-\alpha_i}} \right) \leq 2K \frac{(\lceil an + \varepsilon n \rceil - \lceil an \rceil)^2}{(\lceil an \rceil + 1)^{3-\alpha}} \sim \frac{2K\varepsilon^2}{a^{3-\alpha}n^{1-\alpha}}$$

Et maintenant :

$$\xi(n, a, \varepsilon) = \mathbb{E}(\chi(n, a, \varepsilon)) = \sum_{i=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} \mathbb{E}(Z_i) = \sum_{i=\lceil an \rceil+1}^{\lceil an+\varepsilon n \rceil} \frac{1}{X_i} \rightarrow \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

En revenant à la majoration on obtient que $\forall x < x_n$:

$$\mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) \leq \frac{\sqrt{2K\varepsilon}}{n^{\frac{1-\alpha}{2}} a^{\frac{3-\alpha}{2}}} = \frac{K(a, \varepsilon)}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}$$

Finalement on fini la première étape du calcul :

$$\begin{aligned}
P^*(n, a, \varepsilon) &= \int_0^{x_n} \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) dx \\
&\quad + \int_{x_n}^{h \log(n)} \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) dx \\
&\leq K(a, \varepsilon) \frac{x_n}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}} + \int_{x_n}^{h \log(n)} \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) dx \\
&\leq o(1) + \int_{x_n}^{h \log(n)} \mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) dx
\end{aligned} \tag{4}$$

car $x_n \sim h \log(n)$ donc $\frac{x_n}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour la majoration du deuxième morceaux de l'inégalité on commence par re-travailler la probabilité :

$$\mathbb{P}(\chi(n, a, \varepsilon) > h \log(n) - x \cap T_R(\lceil an \rceil) = x) \leq \mathbb{P}(T_R(\lceil an \rceil) = x)$$

On note $T_R^*(an) = T_R(\lceil an \rceil) - Z_1$. On a presque sûrement $T_R^*(an) = h \log(n) + h \log(a) - c + o(1)$, où c est une variable aléatoire indépendante de a , finie presque sûrement. Grâce à (4) et à se développement on trouve :

$$\begin{aligned}
P^*(n, a, \varepsilon) &= \mathbb{P}(x_n \leq T_R(\lceil an \rceil) \leq h \log(n)) \\
&= \mathbb{P}(x_n - T_R^*(an) \leq Z_1 \leq h \log(n) - T_R^*(an)) \\
&= \mathbb{E}((\exp^{-(x_n - T_R^*(an))} - \exp^{-(h \log(n) - T_R^*(an))}) \mathbb{1}_{(x_n \geq T_R^*(an))}) \\
&\quad + \mathbb{E}((1 - \exp^{-(h \log(n) - T_R^*(an))}) \mathbb{1}_{(h \log(n) \geq T_R^*(an)) > x_n}) \\
&= \mathbb{E}((\exp^{-(-h \log(a+\varepsilon) + c + o(1))} - \exp^{-(-h \log(a) + c + o(1))}) \mathbb{1}_{(c \geq h \log(a+\varepsilon))}) \\
&\quad + \mathbb{E}((1 - \exp^{-(-h \log(a) + c + o(1))}) \mathbb{1}_{(h \log(a+\varepsilon) > c \geq h \log(a))}) \\
&= \mathbb{E}(\exp^{-c} \mathbb{1}_{(c \geq h \log(a+\varepsilon))}) ((a + \varepsilon)^h - a^h) \\
&\quad + \mathbb{E}((1 - a^h \exp^{-c}) \mathbb{1}_{(h \log(a+\varepsilon) > c \geq h \log(a))}) + o(1) \\
&\leq 2(1 - (\frac{a}{a + \varepsilon})^h)
\end{aligned} \tag{5}$$

puis :

$$\begin{aligned}
P^*(n, a, \varepsilon) &= \mathbb{P}(x_n - T_R^*(an) \leq Z_1 \leq h \log(n) - T_R^*(an)) \\
&\leq \mathbb{E}((\exp^{-(x_n - T_R^*(an))} - \exp^{-(h \log(n) - T_R^*(an))}) \mathbb{1}_{(h \log(n) \geq T_R^*(an))}) \\
&\leq \mathbb{E}((\exp^{-(-h \log(a+\varepsilon) + c + o(1))} - \exp^{-(-h \log(a) + c + o(1))}) \mathbb{1}_{(c \geq h \log(a))}) \\
&\leq \mathbb{E}(\exp^{-c} \mathbb{1}_{(c \geq h \log(a))}) ((a + \varepsilon)^h - a^h) \\
&\leq \mathbb{E}(\exp^{-c}) ((a + \varepsilon)^h - a^h)
\end{aligned} \tag{6}$$

Donc avec (5) et (6), $P^*(n, a, \varepsilon) \leq \min(2(1 - (\frac{a}{a+\varepsilon})^h), \mathbb{E}(\exp^{-c})((a+\varepsilon)^h - a^h))$. Comme la première fonction est décroissante et la seconde croissante, on cherche alors la solution à ε fixé de $2 = \mathbb{E}(\exp^{-c})(a + \varepsilon)^h$ qui est le point de croisement, et on trouve $a_0 = (\frac{2}{\mathbb{E}(\exp^{-c})})^{\frac{1}{h}} - \varepsilon$.

Ainsi pour ε assez petit on trouve $a_0 > 0$ et donc on a $P^*(n, a, \varepsilon) \leq 2(1 - (\frac{a_0}{a_0 + \varepsilon})^h) = 2(1 - (1 - \varepsilon(\frac{2}{\mathbb{E}(\exp^{-c})})^{\frac{1}{h}})^h) \leq C\varepsilon$ avec $C > 0$, ce qui valide le lemme. \square

En définitive, on a montré que la variable aléatoire limite $\frac{r}{b}$ est à densité, et donc que r et b le sont aussi, car $r = \frac{1}{1 + \frac{1}{r}}$ et $b = \frac{1}{1 + \frac{1}{b}}$.

2.2 Preuve du théorème 2.1

On revient maintenant dans le cadre de l'introduction après ce détour préliminaire par les urnes de Polyà. Je vais donner une démonstration du Théorème 2.1 se basant sur les propriétés précédemment établit.

Pour G un arbre et e une arête de G , on considère G_i la suite des sur-arbres de e , c'est à dire que l'on a $G_1 = e$, $G_{k+1} = G$, et pour tout $i \in [1, k]$, G_{i+1} est composé de G_i en parallèle ou en série.

On a $\mathbb{P}(G(n)) = 1$ car G est renforcé à chaque marche de fourmis, et comme $G_{i+1}(n) \subset G_i(n)$, on a aussi $\mathbb{P}(G_i(n) | G_{i+1}(n)) = \frac{\mathbb{P}(G_i(n))}{\mathbb{P}(G_{i+1}(n))}$ (*). On peut alors écrire la probabilité de renforcer e comme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1(n)) &= \mathbb{P}(G_1(n) \cap G_2(n)) \\
&= \mathbb{P}(G_1(n) | G_2(n)) \mathbb{P}(G_2(n)) \\
&= \mathbb{P}(G(n)) \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(G_i(n) | G_{i+1}(n)) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(G_i(n) | G_{i+1}(n))
\end{aligned} \tag{7}$$

Proposition 2.6 :

Lorsque G est un sous-graphe SP d'un graphe SP sur lequel se déroule un processus de fourmis et que G est constitué de H_1 et H_2 :

- en parallèle, alors $\frac{\mathbb{P}(H_1(n))}{\mathbb{P}(G(n))} = \frac{C_{H_1}(n)}{C_{H_1}(n)+C_{H_2}(n)}$
- en série, alors $\frac{\mathbb{P}(H_1(n))}{\mathbb{P}(G(n))} = 1$

Démonstration. 2.6 :

Cas 1 : si H_1 et H_2 sont en parallèle, alors on décompose la probabilité de renforcé H_1 comme celle d'aller de N à N_G sans atteindre de feuille ni de noeuds postérieur à G et sans ensuite revenir en arrière, celle d'emprunter H_1 à la place de H_2 , puis enfin celle d'arriver en F en empruntant les noeuds postérieurs à G . On définit les noeuds postérieurs à un sous-graphe SP comme l'ensemble des noeuds par lesquelles la fourmi peut revenir pour renforcer le sous-graphe. On fait de même pour G en remplaçant seulement le fait d'emprunter H_1 par celui d'emprunter H_1 ou H_2 . Finalement la probabilité totale étant le produit des probabilités, on a bien $\frac{\mathbb{P}(H_1(n))}{\mathbb{P}(G(n))} = \frac{C_{H_1}(n)}{C_{H_1}(n)+C_{H_2}(n)}$.

Cas 2 : si H_1 et H_2 sont en série, alors on a en fait égalité des événements $H_1(n) = G(n)$, donc on a bien $\frac{\mathbb{P}(H_1(n))}{\mathbb{P}(G(n))} = 1$ d'après (*). □

D'après la proposition 2.6, on peut se contenter de ne garder que les sur-graphes de e étant parallèle, c'est ce qu'on fera donc lorsqu'on parle des sur-graphes de e . En les renumérotant G_i de sorte à avoir G_i et H_i en parallèle, on a donc :

$$\mathbb{P}(G_1(n)) = \prod_{i=1}^{k'} \frac{C_{G_i}(n)}{C_{G_i}(n) + C_{H_i}(n)} \quad (8)$$

Montrons enfin les deux propositions suivantes qui vont nous permettre de conclure.

Proposition 2.7 :

On pose $p_n \in [0; 1]$ une suite de variable aléatoire, et $r_n = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ où Z_i variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p_i . On a alors p_n et r_n qui ont même limite, en supposant r_n convergente presque sûrement.

Proposition 2.8 :

On note $P_G(n)$, le poids de G sous-graphe d'un graphe H SP définit comme le nombre de fourmis du processus de H renforçant G au temps n , auquel on ajoute $P_G(0) = 1$.

On a alors $\frac{C_G}{P_G} \rightarrow \frac{1}{h_G}$ où h_G est la hauteur géodésique de G .

Démonstration. 2.7 :

On note F_n la sigma-algèbre engendrée par Z_1, \dots, Z_n , et on pose $P_n = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}$. Montrons alors que $\forall \varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|r_n - P_n| > \varepsilon)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci permet ensuite d'avoir $\mathbb{P}(|r - p| > \varepsilon) = 0$ pour toute valeur d'adhérence p de p_n , et donc presque sûrement $r = p$, en utilisant la réciproque du théorème de Césaro car p_n bornée.

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|r_n - P_n| > \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{V}(r_n - P_n)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{cov}(Z_i - p_i, Z_j - p_j)}{((n+1)\varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Et $\text{cov}(Z_i - p_i, Z_j - p_j) = \mathbb{E}((Z_i - p_i)(Z_j - p_j)) - \mathbb{E}(Z_i - p_i)\mathbb{E}(Z_j - p_j)$

En utilisant les espérances conditionnelles et le fait que $\mathbb{E}(Z_j|F_j) = p_j$, on trouve que :

$$\mathbb{E}(Z_j - p_j) = \mathbb{E}(Z_j - p_j|F_j) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_j|F_j) - p_j) = 0$$

$$\text{Si } i < j, \mathbb{E}((Z_i - p_i)(Z_j - p_j)) = \mathbb{E}((Z_i - p_i)(Z_j - p_j)|F_j) = \mathbb{E}((Z_i - p_i)(\mathbb{E}(Z_j|F_j) - p_j)) = 0$$

$$\text{Si } i = j, \mathbb{E}((Z_i - p_i)^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_i|F_i) - 2p_i\mathbb{E}(Z_i|F_i) + (p_i)^2) = \mathbb{E}(p_i(1 - p_i)) \leq \frac{1}{4}$$

Donc finalement on a $\mathbb{P}(|r_n - P_n| > \varepsilon) \leq \frac{n}{(2 \times n + 1 \times \varepsilon)^2}$ donc $\mathbb{P}(|r_n - P_n| > \varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui conclut la preuve. \square

Démonstration. 2.8 :

En appliquant la proposition 2.7 à $w_e(n) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ avec Z_i variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(W_e(n))$, on a comme $w_e(n) \rightarrow X_e$ par théorème 1.1, alors $\mathbb{P}(W_e(n)) \rightarrow X_e$. \square

En utilisant la proposition 2.8, on peut montrer que les C_{G_i} et C_{H_i} vérifient les bonnes hypothèses, et donc que $\frac{C_{G_i}(n)}{C_{G_i}(n) + C_{H_i}(n)}$ tend vers une variable aléatoire à densité, si les hauteur géodésique de G_i et H_i sont les mêmes, vers 0 ou 1 sinon d'après le théorème 1.1.

Ainsi on en déduit que X_e vaut soit 0 ou 1 presque sûrement, soit un produit de variables aléatoires indépendantes à densité, l'indépendance venant de la structure d'arbre du graphe : dans un arbre, on peut regarder les choix de la fourmi de bas en haut et les combiner pour obtenir un processus identique à celui allant de haut en bas.

La valeur 0 est prise lorsque l'arête n'est pas dans l'arbre géodésique.

La valeur 1 est prise seulement si en remontant la suite des G_i on a que des arbres en série, ou en parallèle avec des arbres de hauteur géodésique plus grande, ce qui donne bien le critère du théorème 2.1.

2.3 Discussion sur la généralisation

Le théorème 2.1 donne une meilleure compréhension des poids normalisés limites du processus dans le cas des arbres. Beaucoup de choses pourrait continuer d'être vrai pour les graphes SP, mais certaines parties cruciales manquent pour pouvoir étendre la preuve.

En effet, on a dit que dans le cas des arbres on pouvait construire le processus à l'envers, en partant de F vers N. Mais ceci n'est pas possible dans le cas des graphes SP, et empêche donc d'avoir l'indépendance des conductances C_{G_i} et C_{H_i} deux arbres parallèles. Cela entraîne donc :

- 1 - l'échec du processus de Rubin, puisqu'on ne peut plus tirer les boules séparément, c'est-à-dire que $R(t)$ et $B(t)$ ne sont plus indépendants,
- 2 - le produit de variables aléatoires final n'est plus indépendant, et donc même si elles sont à densité, X_e n'est plus garanti d'être à densité.

3 Marche de fourmis pour des poids non-linéaire

Dans cette section nous allons discuter d'une variante du modèle défini en introduction. On considère G un graphe sur lequel on effectue un processus de fourmis, mais à présent la probabilité de prendre une arête change. On pose $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a à chaque noeuds A, la probabilité de prendre l'arête e est $\frac{W_e(n)^\alpha}{\sum_{f \sim A} W_f(n)^\alpha}$, où $f \sim A$ si et seulement si f est une arête dont l'un des bout est A. Le modèle est linéaire pour $\alpha = 1$, sur-linéaire pour $\alpha > 1$ et sous-linéaire pour $\alpha < 1$. On ne s'intéresse ici pas au cas $\alpha = 1$, on dit donc que le processus de fourmis est non-linéaire.

Nous prouverons le théorème suivant qui décrit exactement ce qui se passe asymptotiquement pour les cas sous- et sur-linéaire, pour des graphes SP.

Théorème 3.1 :

Pour G graphe SP, sur lequel on considère un processus de fourmis non-linéaire.

On a alors asymptotiquement :

- pour $\alpha < 1$, tous les poids normalisés convergent presque sûrement vers des constantes strictement positives, déterministes et calculables récursivement. Les arêtes ont donc des poids normalisés de limites déterministes.
- pour $\alpha > 1$, tous les poids normalisés convergent presque sûrement vers 0 ou 1. Cela laisse donc un unique chemin non nul de N à F qui est emprunté mais n'est pas forcément géodésique.

3.1 Urne de Polyà non-linéaire

On commence encore une fois par un partie préliminaire sur les urnes de Polyà en étudiant cette fois ci un modèle d'urnes non-linéaire.

On considère la même définition d'une urne de Polyà que dans la partie 2.1, mais cette fois on introduit deux suites de variables aléatoires (X_n) et (Y_n)

qui convergent presque sûrement vers x et Y respectivement, ainsi que le réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et différent de 1.

Ici, la probabilité de tirer une boule rouge au n -ième tirage est

$$p_R(n) = \frac{R_{n-1}X_{n-1}}{R_{n-1}X_{n-1} + B_{n-1}Y_{n-1}}$$
 avec toujours R_0 et B_0 des constantes positives.

On peut alors réécrire $R_n = R_0 + \sum_{i=1}^n Z_i$ où $Z_i \sim B(p_R(i))$. On a alors par proposition 2.7 que $\frac{R_n}{n}$ et $p_R(n)$ ont les mêmes limites.

On souhaite alors prouver la proposition suivante.

Proposition 3.2 :

$\frac{R_n}{n}$ possède une limite r qui est un point fixe de la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{x^\alpha + \frac{Y}{X}(1-x)^\alpha}.$$

Notamment, si $0 < \alpha < 1$ alors la limite est $r = \frac{1}{1 + (\frac{Y}{X})^{\frac{1}{1-\alpha}}}$, si $\alpha > 1$ alors la limite est $r = 0$ ou 1.

Démonstration. 3.2 :

Soit r une valeur d'adhérence de $\frac{R_n}{n}$, qui est aussi celle de $p_R(n)$. Or comme

$$p_R(n) = \frac{R_{n-1}^\alpha X_{n-1}}{R_{n-1}^\alpha X_{n-1} + B_{n-1}^\alpha Y_{n-1}},$$
 par passage à la limite on a : $r = \frac{r^\alpha}{r^\alpha + \frac{Y}{X}(1-r)^\alpha}$

r ne peut donc valoir que 3 valeurs. Or cela veut dire que l'on a la convergence presque sûr de $\frac{R_n}{n}$ car l'ensemble des valeur d'adhérence de cette suite réelle

bornée est un intervalle : car $|\frac{R_n}{n} - \frac{R_{n+1}}{n+1}| < \frac{1+R_0}{n}$. Par étude de fonction on trouve ensuite que les trois points fixe sont 0, 1 et $r_\alpha = \frac{1}{1 + (\frac{Y}{X})^{\frac{1}{1-\alpha}}}$.

Enfin à l'aide de théorèmes non présentées ici [?], on en déduit :

- si $0 < \alpha < 1$, alors $r = r_\alpha$, comme la valeur d'adhérence est unique, on a donc que $\frac{R_n}{n}$ converge presque sûrement vers r_α , qui est bien un point fixe de f_α .

- si $\alpha > 1$, alors r vaut 0 ou 1.

Ce qui conclut la preuve. □

3.2 Limite des poids normalisés lors de non-linéarité

Revenons à présent dans le cas de G un graphe SP avec un processus de fourmis. On définit pour H sous-graphe SP de G son poids $P_H(n)$ par induction comme

- si $H = e$, $P_H(n) = W_e$

- si H est composé de H_1 et H_2 en série, $P_{H_1}(n) = P_{H_2}(n) = P_H(n)$

- si H est composé de H_1 et H_2 en parallèle, $P_H(n) = P_{H_1}(n) + P_{H_2}(n)$

A une constante près, $P_H(n)$ vaut le nombre de fourmis ayant renforcé H au temps n .

Proposition 3.3 :

Pour H sous-graphe SP de G , on a $\frac{C_H(n)}{P_H(n)^\alpha} \rightarrow X_H$. Avec $X_H > 0$ presque sûrement, et constante presque sûrement pour $\alpha < 1$.

Démonstration. 3.3 :

On effectue la preuve par induction sur la structure de graphe SP :

- si H est une arête e de G , alors $P_H(n)^\alpha = C_H(n)$, donc on a $X_H = 1$

- si H est composé de H_1 et H_2 en série, on a $P_{H_1}(n) = P_{H_2}(n) = P_H(n)$, donc

$$\frac{C_G(n)}{P_G(n)^\alpha} = \frac{\frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha} \frac{C_{H_2}(n)}{P_{H_2}(n)^\alpha}}{\frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha} + \frac{C_{H_2}(n)}{P_{H_2}(n)^\alpha}} \rightarrow \frac{X_{H_1} X_{H_2}}{X_{H_1} + X_{H_2}} = X_G$$

- si H est composé de H_1 et H_2 en parallèle, on a $P_{H_1}(n) + P_{H_2}(n) = P_H(n)$.

$$\text{On a alors } \frac{C_H(n)}{P_H(n)^\alpha} = \frac{P_{H_1}(n)^\alpha}{P_{H_1}(n)^\alpha + P_{H_2}(n)^\alpha} \frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha} + \frac{P_{H_2}(n)^\alpha}{P_{H_1}(n)^\alpha + P_{H_2}(n)^\alpha} \frac{C_{H_2}(n)}{P_{H_2}(n)^\alpha}$$

Or on peut voir la dynamique de $P_{H_1}(n)$ et $P_{H_2}(n)$ comme celle d'une urne de Polyà non-linéaire, en extrayant pour ne prendre que les instants où l'on a un renforcement de H , ce qui fait asymptotiquement $P_H(n)$ instants. La probabilité de piocher H_1 étant alors

$$\frac{P_{H_1}(n)^\alpha \frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha}}{P_{H_1}(n)^\alpha \frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha} + P_{H_2}(n)^\alpha \frac{C_{H_2}(n)}{P_{H_2}(n)^\alpha}} \text{ Or par induction}$$

comme $\frac{C_{H_1}(n)}{P_{H_1}(n)^\alpha} \rightarrow X_{H_1}$ et $\frac{C_{H_2}(n)}{P_{H_2}(n)^\alpha} \rightarrow X_{H_2}$, on peut appliquer la proposition

3.2, on a alors $\frac{P_{H_1}(n)}{P_H(n)}$ et $\frac{P_{H_2}(n)}{P_H(n)}$ qui ont des limites presque sûrement, et sont constantes presque sûrement dans le cas $\alpha < 1$. En revenant à l'expression de $\frac{C_H(n)}{P_H(n)^\alpha}$ on a alors bien qu'elle converge presque sûrement vers une limite finie, et constante pour $\alpha < 1$. □

Remarque :

Dans la preuve précédent, on fait en fait l'hypothèse que $P_H(n)$ diverge vers $+\infty$. Cette hypothèse sera vérifiée par la suite : on ne s'intéresse qu'au cas de cette divergence car sinon, cela signifie que le poids limite des arêtes dans H sera nul.

Démonstration. 3.1 :

Soit G graphe SP, et e une arête de G . On définit comme en partie 2.2 la suite G_i des sur-graphes de e étant en parallèle avec H_i . On a alors encore la même équation :

$$\mathbb{P}(G_1(n)) = \prod_{i=1}^k \frac{C_{G_i}(n)}{C_{G_i}(n) + C_{H_i}(n)} = \prod_{i=1}^k \frac{P_{G_i}(n)^\alpha X_i(n)}{P_{G_i}(n)^\alpha X_i(n) + P_{H_i}(n)^\alpha Y_i(n)} \quad (10)$$

Où on a posé $X_i(n) = \frac{C_{G_i}(n)}{P_{G_i}(n)^\alpha}$ et $Y_i(n) = \frac{C_{H_i}(n)}{P_{H_i}(n)^\alpha}$ qui sont des variables aléatoires qui convergent presque sûrement pour $n \rightarrow +\infty$ d'après la proposition 3.3.

or chacun des termes du produit peut être interpréter, en extrayant les instants de renforcement, comme comme une urne de Polyà non-linéaire. Ainsi, on a convergence vers la limite indiquée dans la proposition 3.2.

Si $0 < \alpha < 1$, alors chaque terme tend vers une limite déterminée non nulle, et comme la probabilité de renforcer e tend vers son poids normalisé, alors ce

poids a a une limite déterministe, qui ne dépend que de la structure du graphe car on peut alors calculer les limites des variables $X_i(n)$ et $Y_i(n)$.

Si $\alpha > 1$, alors on regarde les termes dans l'ordre du plus grand sous-graphe pour pouvoir effectuer l'extraction. Si la limite est 1 alors on peut continuer l'extraction aux termes suivant, sinon la limite est 0 par proposition 3.2 et alors la limite de la probabilité vaut 0. On a donc le poids normalisé qui vaut asymptotiquement 0 ou 1. Ceci conclut la preuve. \square

La méthode précédente pourrait être généralisée à des graphes non SP pour trouver les poids limites des arêtes. En effet, cela donne alors un système d'équation à plusieurs inconnu non trivial, le cas trivial étant obtenu lorsque $\alpha = 1$. Cela donne des équations assez complexes pour le graphe losange, mais qui semblent raisonnables pour être résolue à la main.

4 Modèle de Diffusion de Nourriture

Dans ce nouveau modèle, on reprend des poids linéaire comme dans le cas classique mais on change la répartition initiale des poids. Dans ce modèle appelé *diffusion de nourriture* (DN) on considère G un graphe SP-géo, les poids initiaux sur le graphe Série-Parallèle sont donnés récursivement : le poids du graphe total G est donnée par $P_G(0) = a \in \mathbb{R}_+^*$, si G est composé de H_1 et H_2 en série alors $P_{H_1}(0) = P_{H_2}(0) = P_G(0)$, si G est composé des graphes H_1, H_2, \dots, H_k en parallèle et pas un de plus (c'est à dire que les H_i ne sont pas composé directement de deux graphes en parallèle) alors $P_{H_i}(0) = \frac{P_G(0)}{k}$. Enfin si G est une arête, alors le poids de l'arête est le poids de G .

Une logique explicative de la répartition de ces poids est que l'on imagine qu'initialement la nourriture attire les fourmis d'où les poids initiaux sur le graphe, et son odeur va de F à N en se séparant en intensité équitablement sur les voies en parallèles. Puisqu'on compare l'intensité de l'attraction de l'odeur de celle des phéromones ensuite posées par les fourmis, le paramètre a devient un paramètre important du modèle.

Dans ce nouveau modèle on possède une très bonne idée de la répartition asymptotique des fourmis.

Théorème 4.1 :

Pour G un graphe SP-géo sur lequel on effectue un processus de fourmis DN, alors les poids normalisés des arêtes tendent vers un produit de variable aléatoire de Bêta dont on précisera les paramètres.

On reprend la définition du poids d'un graphe SP de la partie précédente. On montre alors la proposition suivante :

Proposition 4.2 :

Pour G un graphe SP-géo sur lequel on effectue un processus de fourmis DN, on a pour tout sous-graphe SP H de hauteur géodésique h_H de G que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_H(n) = \frac{P_H(n)}{h_H}$

Démonstration. 4.2 :

On procède par induction sur la structure de graphe SP-géo :

- si H est une arête, on a bien $C_H(n) = P_H(n)$ par définition

- si H est composé de H_1 et H_2 en parallèle, alors on a $C_H(n) = C_{H_1}(n) + C_{H_2}(n)$. Par induction on a alors $C_{H_i}(n) = \frac{P_{H_i}(n)}{h_{H_i}}$ pour $i = 1, 2$. Or de plus on a $h_{H_1} = h_{H_2}$ puisque H est géodésique. Donc finalement comme $P_{H_1}(n) + P_{H_2}(n) = P_H(n)$ on trouve bien $C_H(n) = \frac{P_H(n)}{h_H}$.

- si H est composé de H_1 et H_2 en série, alors $C_H = \frac{1}{\frac{1}{C_{H_1}} + \frac{1}{C_{H_2}}}$, avec par induction $C_{H_i}(n) = \frac{P_{H_i}(n)}{h_{H_i}}$ pour $i = 1, 2$. Or on a $h_{H_1} + h_{H_2} = h_H$ et $P_{H_1}(n) = P_{H_2}(n) = P_H(n)$, d'où on trouve bien $C_H(n) = \frac{P_H(n)}{h_H}$

□

Démonstration. 4.1 :

Pour G graphe SP-géo et e une arête, on a comme en partie 2.2 la suite G_i des sur-graphes de e étant en parallèle avec H_i , puisque les graphes en série ne nous intéressent pas pour obtenir :

$$\mathbb{P}(W_e(n)) = \prod_{i=1}^k \frac{C_{G_i}(n)}{C_{G_i}(n) + C_{H_i}(n)} = \prod_{i=1}^k \frac{P_{G_i}(n)}{P_{G_i}(n) + P_{H_i}(n)} \quad (11)$$

Car comme G_i et H_i sont en parallèles on a $h_{G_i} = h_{H_i}$. On a alors que le terme $\frac{P_{G_i}(n)}{P_{G_i}(n) + P_{H_i}(n)}$ est assimilable à une urne de Polya en extrayant (on fait la même chose qu'en partie 2). Or ici comme la forme de l'urne est simple, on sait qu'alors on a $\frac{P_{G_i}(n)}{P_{G_i}(n) + P_{H_i}(n)} \rightarrow \chi_i \sim \text{Bêta}(P_{G_i}(0), P_{H_i}(0))$.

Ceci permet de conclure la preuve.

□

Ainsi, on a donc bien à la limite w_e un produit de variable aléatoire Bêta dont les paramètres peuvent être déterminés récursivement. On peut d'ailleurs montrer que lorsque l'on a une mise en parallèle de k graphes, les poids normalisés des graphes ont pour limite un vecteur aléatoire de loi de Dirichlet $Dir(b, \dots, b)$ où b les le poids initial des graphes. Cela ne change finalement pas la loi finale des arêtes par propriété de la loi de Dirichlet.

On a ici que dans le cas des arbres-géo, ces variables sont indépendants, mais pas forcément dans le cas des graphes SP-géo (ou du moins ce n'est pas encore montré, même si cela semble raisonnable).

5 Cas des graphes à distance 1

Dans cette section nous étudions le cas de graphe ayant la forme de la mise en parallèle d'une arête, identifié simplement par son poids W , et d'un graphe G quelconque. Pour G graphe quelconque, on note G^* ce nouveau graphe.

Théorème 5.1 :

Soit G un graphe de hauteur géodésique strictement supérieur à 1, on considère un processus de fourmis sur G^* . Pour tout $e \in E^*$, on a $w_e \rightarrow 0$, et $w \rightarrow 1$, le tout presque sûrement.

Remarque :

On traite ici en fait le cas d'un graphe avec un seul chemin $N \rightarrow F$ de taille 1, mais on peut aussi traiter le cas d'un nombre k de chemin de taille 1, on a alors encore toute les arêtes de G qui tendent vers 0, et les k arêtes en parallèles tendent vers un vecteur de Dirichlet de loi $Dir(1, \dots, 1)$.

Démonstration. 5.1 :

On va calculer explicitement la probabilité de renforcer un chemin du graphe G , pour le processus dans G^* , donc de ne pas prendre l'arête W . On va ici adopter une nouvelle notation : on note P_{G^*} la probabilité pour le processus de fourmis dans G^* , et P_G la probabilité pour le processus de fourmis dans G .

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{G^*}(G) &= \sum_{c:N \rightarrow F} P_{G^*}(c) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{c_1:N \rightarrow N} P_{G^*}(c_1) \right)^i \sum_{c_2:N \rightarrow F} P_{G^*}(c_2) \end{aligned} \quad (12)$$

où ici, c n'emprunte pas W , c_1 allant de N à N sans passer par F dans G , et c_2 allant de N à F . Or on peut décomposer c_1 comme la concaténation de c_1^1, c_1^2, \dots , on a donc $P_{G^*}(c_1) = P_{G^*}(c_1^1)P_{G^*}(c_1^2)\dots$.

Soit e_1, \dots, e_k, W les arêtes attacher à N , les e_i étant dans G . On voit que dans la structure de G^* , sauf lorsque l'on a une arête de N vers les e_i , on a $P_{G^*}(c_1^i) = P_G(c_1^i)$. Dans le chemin c_1 , on a donc que la première probabilité qui change par rapport au cas dans G .

On a : $P_{G^*}(c_1^1) = \frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} P_G(c_1^1)$. Donc $P_{G^*}(c_1) = \frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} P_G(c_1)$, et de même avec c_2 .

Finalement on a :

$$P_{G^*}(G) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{c_1:N \rightarrow N} \frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} P_G(c_1) \right)^i \times \sum_{c_2:N \rightarrow F} \frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} P_G(c_2)$$

En notant $B_G = \sum_{c_1:N \rightarrow N} P_G(c_1)$ et $A_G = \sum_{c_2:N \rightarrow F} P_G(c_2)$, on trouve enfin

que :

$$P_{G^*}(G) = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} A_G}{1 - \frac{\sum_{i=1}^k W_{e_i}}{W + \sum_{i=1}^k W_{e_i}} B_G}$$

Pour $W = 0$, on retrouve un processus sur G , donc dans ce cas comme $P_{G^*}(G) = 1$, on trouve que $B_G = 1 - A_G$. Donc finalement, en posant $W_e = \sum_{i=1}^k W_{e_i}$, on a $P_{G^*}(G) = \frac{W_e A_G}{W + W_e A_G}$.

Comme dans les parties précédentes, on peut montrer que la probabilité de renforcer W a pour limite w . d'où à la limite on a $w + w_e = 1$ et $w + w_e A_G = 1$. Donc $w_e B_G = 0$. Or $B_G > 0$ car il y a moyen de faire dans G un chemin de N à N sans passer vers F , car g est de hauteur géodésique supérieur à 1 strictement. Donc finalement $w_e = 0$, donc on a bien asymptotiquement $w = 1$ et le reste des arêtes qui vaut 0. □

Conjectures 5.2 :

Ici, l'argument utilisé ressemble beaucoup à celui d'une sorte de nouvelle conductance générale défini sur tout type de graphe. Ainsi, en trouvant la limite d'une telle conductance, ici trouver A_G ou B_G , selon la taille d'un graphe, on peut en déduire de nouvelles choses. En particulier, en travaillant sur cette nouvelle conductance, cela permettrait de traiter le cas d'un graphe en parallèle a un chemin de longueur k , dans le cas où k et la hauteur géodésique du graphe sont différentes. Voir même le cas de deux graphes quelconques en parallèle toujours dans le cas de hauteurs géodésiques différentes.

Cela permettrait de confirmer la conjecture selon laquelle lors d'un processus de fourmis linéaire, les fourmis sélectionnent asymptotiquement les plus court chemins du graphe.

6 Cas du graphe triangulaire à deux nids

Dans cette section, on étudie un dernier cas de processus de fourmis. On considère à présent k nids sur le graphe et toujours une unique nourriture, et on fait partir alternativement les fourmis de chaque nids. Les résultats lorsque l'on a plusieurs nids sont assez différent du processus de fourmis à 1 nids. J'étudie ici le cas du graphe triangulaire à deux nids.

On considère le graphe $T(l, m, n)$ le triangle avec une distance l entre N_1 et N_2 , m entre N_1 et F , et n entre N_2 et F .

On cherche alors le comportements asymptotique des arêtes du graphe selon les valeurs de l, m et n . On désigne toutes les arêtes entre deux coins du triangle par la lettre du nombre d'arête car elles ont toutes le même poids.

Je donne ici des observations empiriques et des conjectures seulement, on remarquera que les cas sont symétriques en m et n du à la symétrie du rôle des nids :

- si $n > m + l$, alors $w_l \rightarrow \frac{1}{2}$, $w_m \rightarrow 1$ et $w_n \rightarrow 0$. On a que pour N_1 le plus court chemin vers F est par w_m , et pour N_2 le plus court chemin est w_m et w_l . On voit qu'ici on a bien le plus court chemin qui est sélectionné.
- si $l > m$ et $l > n$, alors on a $w_l \rightarrow 0$ et $w_m \rightarrow \frac{1}{2}$, $w_n \rightarrow \frac{1}{2}$. On a encore les plus courts chemins sauvegardés.
- dans le reste des cas on a des processus aléatoires pour lesquels il est difficile de donner des informations. On observe cependant plusieurs choses. D'abord on a toujours $w_l \leq \frac{1}{2}$, car il semble naturel que les fourmis de N_1 et celles de N_2 ne préfèrent pas toutes passer par w_l , car les fourmis parcoureraient alors toutes des chemins plus long que si elles ne passaient pas par w_l . On a aussi $w_n + w_m = 1$, et il semble y avoir une relation liant w_l et w_m . Ainsi une seule variable aléatoire explique toutes les arêtes.

En dehors ce ceci il semble déjà compliqué d'en dire plus. Pour des graphes à plusieurs nids plus compliqués, une seule tendance se dessine : lorsque les nids ont en commun leur plus court chemin alors c'est celui-ci qui est sélectionné, sinon il y a des interférences entre les nids, c'est à dire que des chemins qui ne sont pas les plus courts vont survivre car se trouvant entre deux nids.

7 Bibliographie

- [1] Kious D. & Mailler C. & Schapira B. (2020), *Finding geodesics on graphs using reinforcement learning*, Cornwell University.
- [2] Kious D. & Mailler C. & Schapira B. (2021), *The trace-reinforced ants process does not find shortest paths*, Cornwell University.
- [3] Davis B. (1990), *Reinforced Random Walks* (Appendice), Springer-Verlag.