Curiosités géométriques

cercle ; la mâchoire de crocodile vous fera souvenir des pointes que l'on uniformise en les aplatissant au tiers. »

BIBLIOGRAPHIE

Voir à la fin du chapitre.

§ 3. — Géométrie Hugodomoïdale.

« L'équidomoïde, dompteur de sphères. »
« L'équidomoïde est comme le soleil : aveugle qui ne le voit pas ! »
« L'École hugodomoïdale est vraiment l'École romantique de la Géométrie. »
« La sphère n'a plus qu'à se dégonfler... ou à se résigner au rôle d'Équidomoïde limite. »
« Analyste ! rends hommage à la Vérité, sinon l'Équidomoïde vengeur viendra peser, la nuit, sur ta poitrine anxieuse. »

Projet d'affiche :

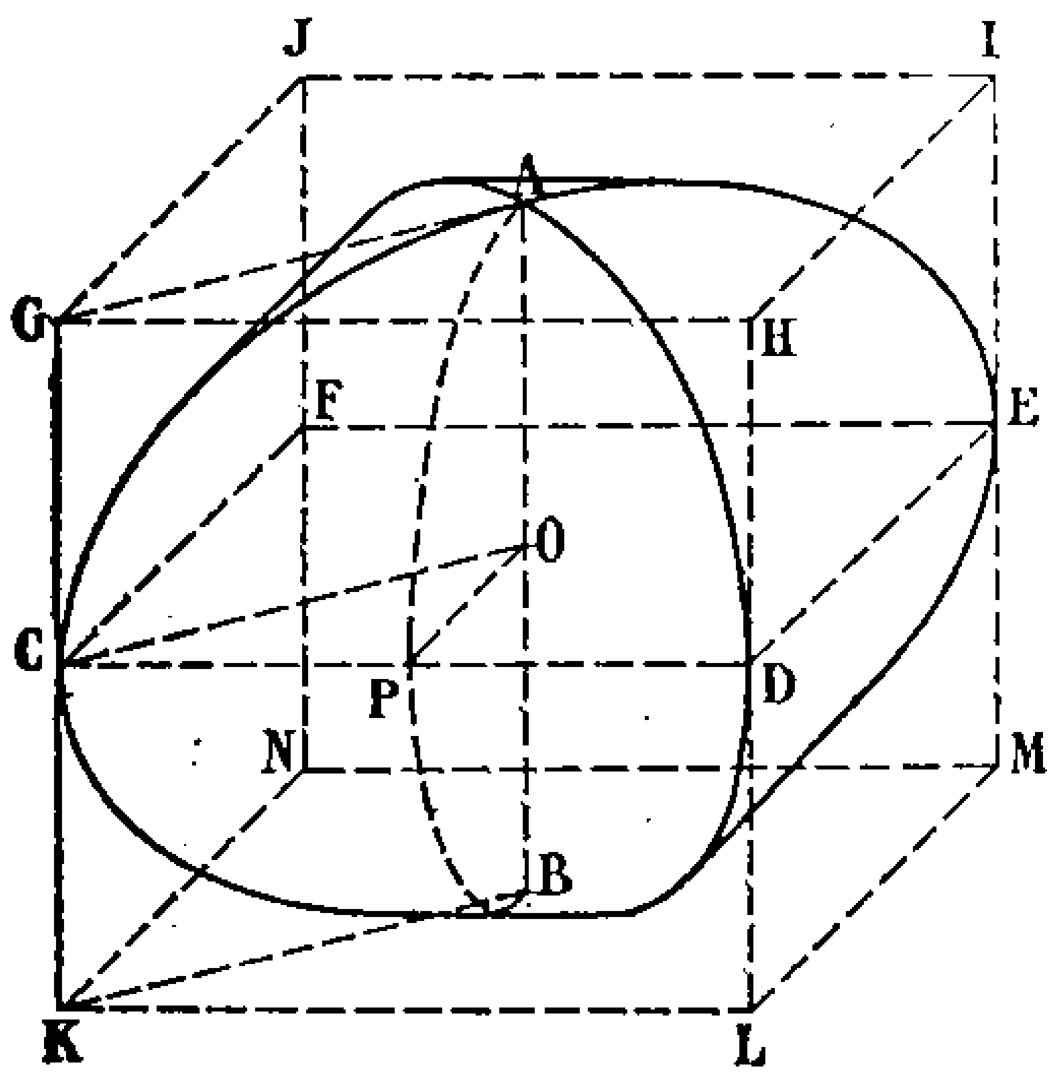
« Jeunes élèves !
N'écoutez pas ce farceur d'Équidomoïde
Lequel prétend démolir notre sphère et veut [dégommer Archimède !
Sans craindre ses onglets, courons sus à l'Équido... [géométrique.
Tombons tous sur l'excentrique
A coups de trique !
Muera ! »

Cte Léopold Hugo.

Le comte Léopold Hugo, neveu de notre grand poète, a publié dans plusieurs brochures, de 1867 à 1875, diverses recherches sur une catégorie de solides qu'il avait été amené à étudier par des considérations de minéralogie et qu'il a en conséquence dénommés « cristalloïdes ». Bien que ces recherches présentent un certain intérêt théorique et pratique, elles n'ont été signalées dans aucun ouvrage de géométrie, du moins à notre connaissance. Il convient de dire d'ailleurs que l'originalité — pour ne pas dire pis — du style de l'auteur, dont nous avons donné en épigraphe quelques échantillons, et qui dans son esprit devait attirer l'attention sur ses études, a plutôt nui à leur diffusion.

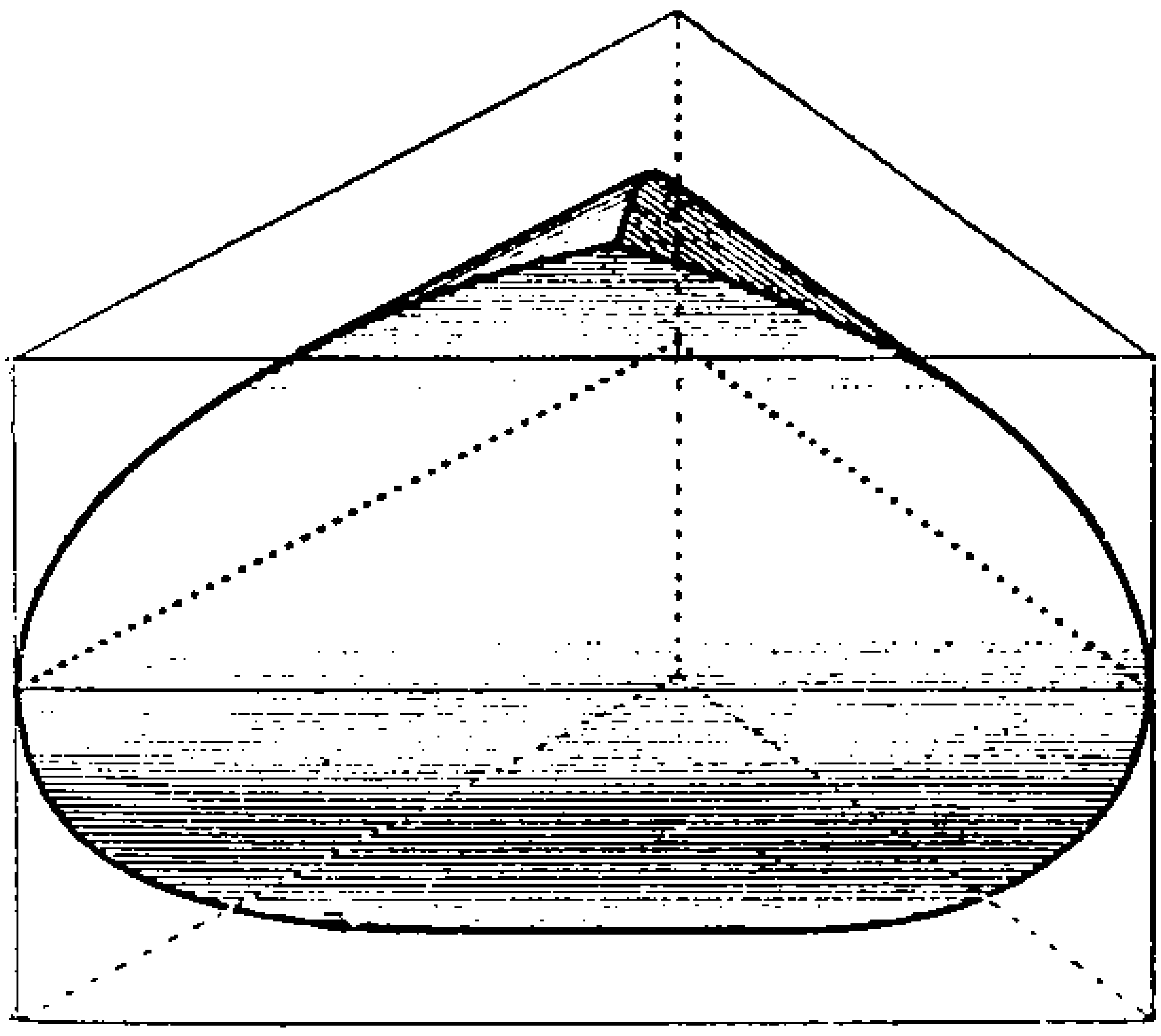
Contrairement à ce qu'il pensait, Léopold Hugo n'est pas le premier qui se soit occupé de cette nature de solides ; lui, qui, en apparence tout au moins, avait déclaré la guerre à la géométrie dite « archimédienne », eût sans doute été fort marri d'apprendre qu'un mathématicien — non des moindres — s'en était déjà occupé avant lui, et que ce mathématicien était précisément... ARCHIMÈDE. La publication récente des Métriques de Héron d'Alexandrie a en effet permis de constater que le géomètre syracusain s'était occupé au moins d'un cas particulier de la question dans ses *Ephodiques*.

Équidomoïdes. — Considérons un cube GHIJ... ; soit APB une demi-circonférence dont le diamètre est la droite AB joignant les centres des deux bases du cube et dont le plan est perpendiculaire à l'arête KL. Admettons maintenant qu'une droite CP se déplace parallèlement à KL de telle sorte que son extrémité P reste sur la demi-circonférence APB. Dans son mouvement, cette droite engendre une surface cylindrique qui, limitée aux plans APB et ACB, est un *onglet*. Si l'on réunit 8 onglets identiques, on forme le solide de la figure,

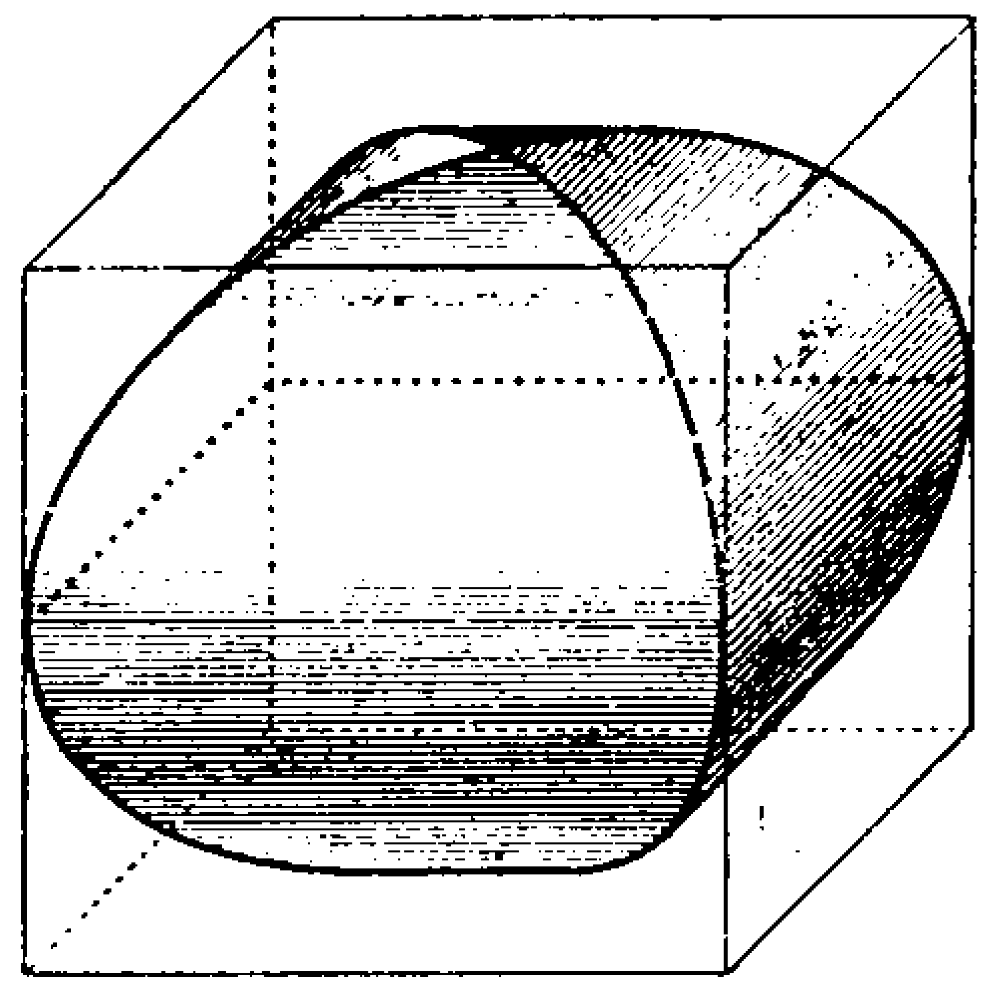


qui est un *équidomoïde* à base carrée CDEF ; ce solide coupé par le plan CDEF donne le contenu d'une voûte dite en « arc de cloître ».

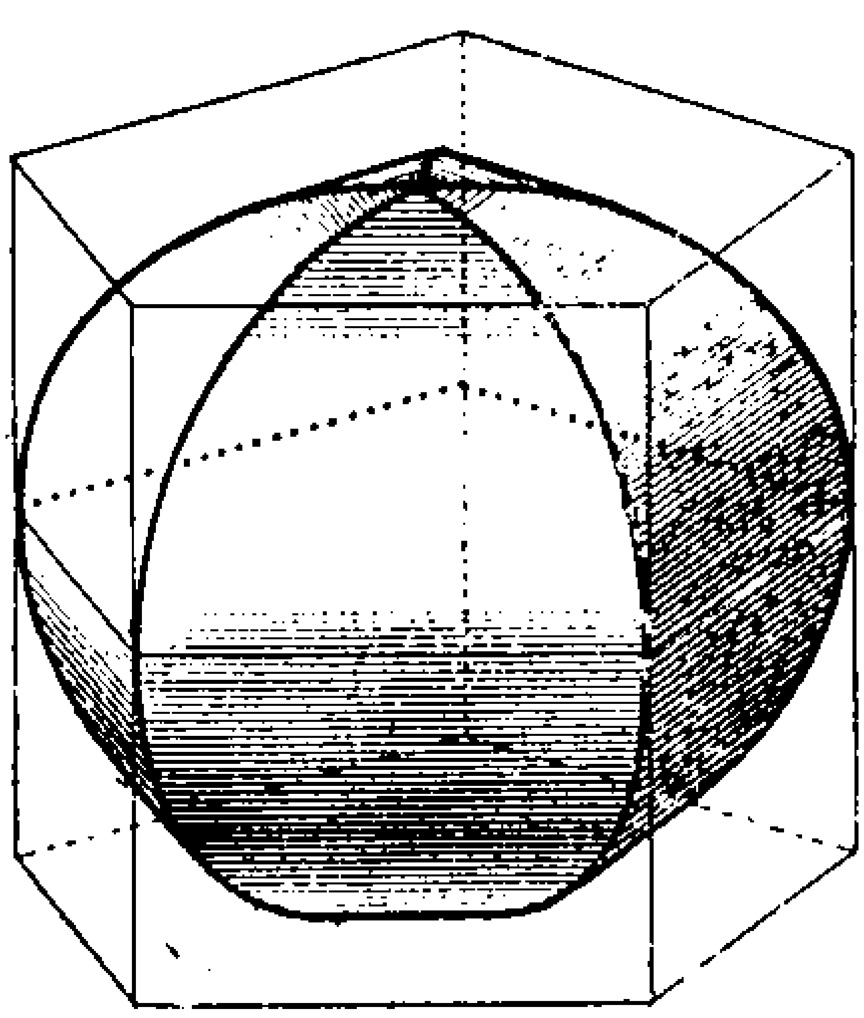
On peut obtenir d'une manière analogue un équidomoïde ayant pour base un polygone régulier quelconque. Nous donnons ci-après la série des équidomoïdes ayant pour base un triang'e équilatéral, un carré, un pentagone, ..., et un cercle ayant même rayon que la demi-circonférence directrice ; dans ce dernier cas, le solide engendré devient une sphère. On peut donc considérer la sphère comme un équidomoïde limite.



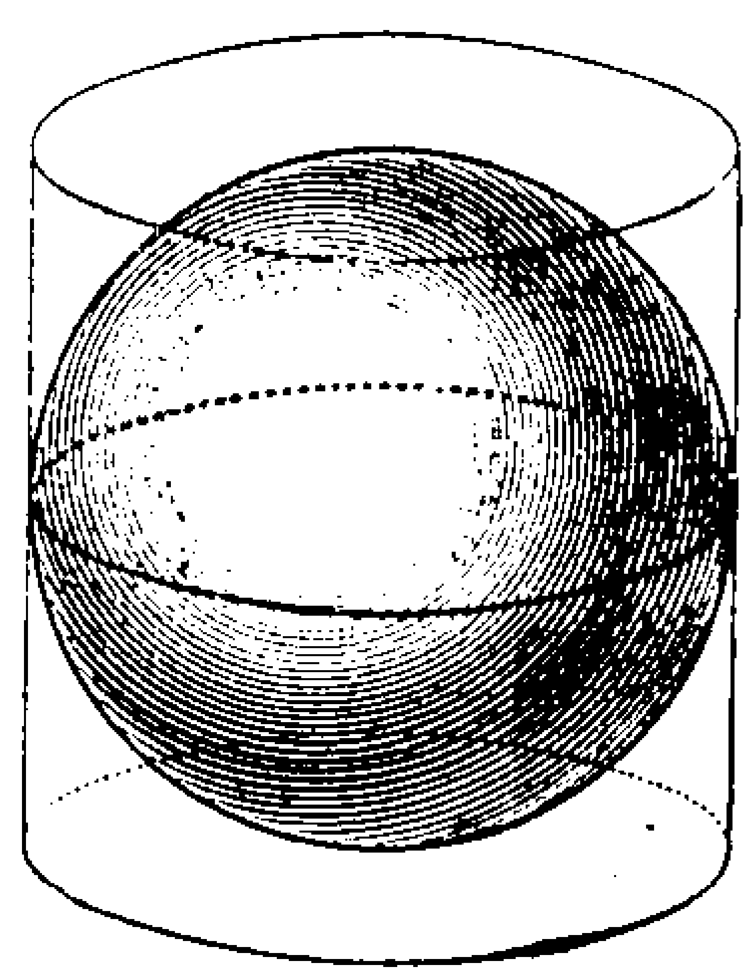
Base triangulaire.



Base carrée.



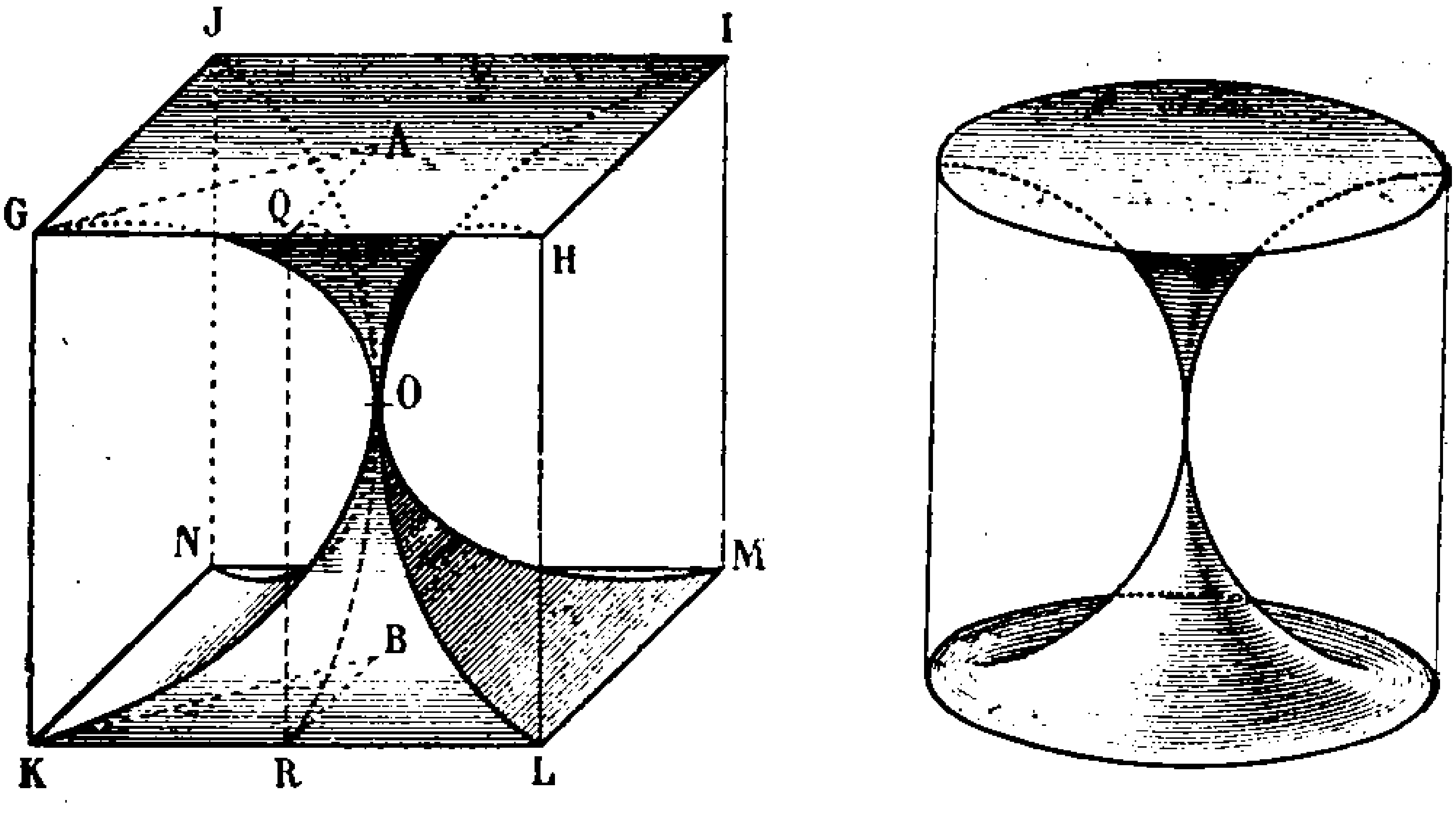
Base pentagonale.



Base circulaire (sphère).

Équidomoïdes réguliers.

Équitrémoïdes. — On peut imaginer une autre espèce de solides engendrés comme les équidomoïdes par une droite se déplaçant parallèlement à elle-même en suivant une demi-circonférence, mais celle-ci étant tangente en O à l'axe AB : ce sont les *équitrémoïdes.*



Base carrée. Base circulaire.

Équitrémoïdes réguliers.

L'équitrémoïde limite, à base circulaire, correspondant à la sphère des équidomoïdes, a, comme on le voit, la forme d'un sablier.

Des cristalloïdes en général. — Si la directrice est une courbe quelconque au lieu d'être une demi-circonférence, le solide formé par la réunion des onglets ainsi engendrés porte dans ce cas général le nom de *cristalloïde.*

En particulier, si la directrice est une demi-ellipse, on aura un *ellidmoïde* ou un *ellitrémoïde* suivant que cette demi-ellipse aura ou non sa concavité tournée vers l'axe.

On aura, au contraire, soit un *hyperdomoïde* ou un *hypertrémoïde,* soit un *paradomoïde* ou un *paratrémoïde* selon que cette directrice sera une branche d'hyperbole ou une parabole.

Tous ces solides sont caractérisés par la simplicité des expressions de leur surface et de leur volume lorsque leur base B et leur hauteur H sont connues ; ces expressions sont en effet une fraction numérique du produit BH. Nous nous contenterons de le montrer pour le cas de l'équidomoïde.

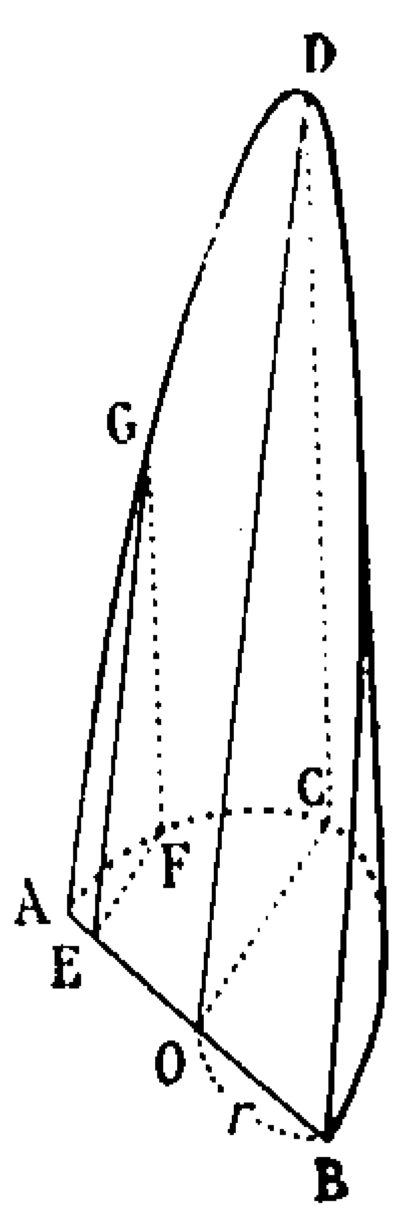
Volume de l'équidomoïde. — L'équidomoïde étant formé par l'assemblage d'onglets cylindriques égaux, nous allons d'abord chercher le volume d'un de ces onglets.

I. — Soit d'abord un onglet ABCD dont la base est un demi-cercle de rayon r et de centre O, et dont la hauteur CD est égale à la circonférence du cercle de même rayon, soit à $2\pi r$.

Menons un plan quelconque EFG perpendiculaire à AB ; il coupe l'onglet suivant un triangle rectangle EFG semblable à OCD puisque les angles en E et en O sont égaux. On a

$$\frac{GF}{EF} = \frac{DC}{OC} = 2\pi, \qquad \text{d'où} \qquad GF = 2\pi\, EF.$$

Il en résulte que la surface du triangle EFG est équivalente à celle du cercle de rayon EF.



Supposons maintenant qu'on divise AB en un certain nombre de parties égales et qu'on mène par les points de division des plans perpendiculaires à AB. Nous partageons ainsi l'onglet en volumes élémentaires que nous pourrons assimiler à des prismes si nous faisons croître indéfiniment le nombre des divisions de AB, et dont les bases seront des triangles analogues à EFG. Ces prismes, d'après la remarque faite ci-dessus, seront équivalents à des cylindres de même hauteur et dont les rayons de base seront les segments EF. La somme de ces cylindres donnant une sphère de rayon r, le volume de l'onglet sera équivalent à celui de cette sphère, soit à $\frac{4}{3}\pi r^3$.

II. — Soit à présent un onglet de volume v, dont le rayon de base est r et dont la hauteur h est quelconque. Nous allons le comparer à l'onglet de même base, de hauteur $2\pi r$ et de volume V. Les triangles de section ayant même base, sont entre eux comme leurs hauteurs, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{h}{2\pi r}$; il en est de même des cylindres élémentaires et par suite des volumes des onglets. On a donc

$$\frac{v}{V} = \frac{h}{2\pi r}, \quad \text{d'où} \quad v = V\frac{h}{2\pi r} = 4/3\,\pi r^3 \times \frac{h}{2\pi r} = 2/3\, r^2 h.$$

Ainsi le volume de l'onglet cylindrique a pour expression $2/3 r^2 h$.

III. — Soit enfin un équidomoïde régulier dont la base a n côtés de longueur $2h$; désignons par r le rayon du cercle inscrit à cette base. L'équidomoïde se compose alors de $2n$ onglets ayant r pour rayon de base et h pour hauteur, et dont le volume est, d'après ce qu'on vient de voir,

$$2n \times 2/3\, r^2 h = 2/3 \times nhr \times 2r.$$

Mais nhr représente la surface B de la base et $2r$ la hauteur H de l'équidomoïde ; le volume de ce dernier est par suite exprimé par la formule très simple

$$2/3\,\mathrm{BH}.$$

Ce volume est donc, comme pour la sphère, les 2/3 de celui du cylindre circonscrit.

Surface de l'équidomoïde. — Cherchons d'abord à déterminer l'expression de la surface latérale d'un onglet, dans les mêmes cas qu'au n° précédent.

I. — La surface latérale de l'onglet (fig. de la p. 323) peut être considérée comme formée d'une infinité de rectangles ayant pour bases les droites $GF = 2\pi EF$; chacun de ces rectangles est équivalent à la surface latérale d'un cylindre circulaire de même hauteur et dont le rayon de base est une longueur EF. La somme des surfaces de ces cylindres étant équivalente à celle d'une sphère de rayon OC ou r, soit à $4\pi r^2$, la surface cherchée a la même valeur.

II. — On a, comme dans le cas du volume, s et S désignant respectivement les surfaces latérales d'un onglet quelconque et d'un onglet de hauteur $2\pi r$,

$$\frac{s}{S} = \frac{h}{2\pi r}, \qquad \text{d'où} \qquad s = \frac{Sh}{2\pi r} = 2rh.$$

III. — La surface de l'équidomoïde régulier composé de $2n$ onglets a donc pour expression

$$2n \times 2rh = 2nh \times 2r = PH,$$

si l'on désigne par P le périmètre de la base et par H la hauteur du solide.

Cette surface est donc, comme pour la sphère, équivalente à la surface latérale ou aux 2/3 de la surface totale du cylindre circonscrit.

L'équidomoïde chez Archimède. — Dans ses *Ephodiques*, Archimède a déterminé, assurément pour la première fois, le volume de l'onglet cylindrique, mais on ne sait quel procédé il a employé. Comme application, il a montré dans le même ouvrage que le solide commun à deux cylindres circulaires pénétrant l'un dans l'autre et dont les bases sont inscrites dans deux faces opposées d'un cube a pour valeur les 2/3 du volume du cube. Ce solide commun est ce que nous avons appelé l'équidomoïde à base carrée et la valeur trouvée par Archimède est bien celle qui résulte de l'application de la formule 2/3 BH donnée plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

Voir à la fin du chapitre II (2e Partie).

BAILLARGÉ. — *Le Stereometricon.* Québec, 1884, in-4°.
CASIMIR REY. — *Omniformule de cubature.* Jal de Longchamps, 1886.
GOULARD. — *Sur la formule des trois niveaux.* Mathesis, 1897.
NICOLO TARTAGLIA. — *General trattato di numeri et misure.* Venise, 1556-1560, in-fol.
F. PEYRARD. — *Œuvres d'Archimède* (traduites par). Paris, 1807, in-4°.
EDOUARD LAGOUT. — *Cahier d'un soldat du génie.* Paris, 1876, in-8°.
Cte LÉOPOLD HUGO. — Théorie des Cristalloïdes élémentaires. Paris, 1867, gr. in-8°.
— Les Cristalloïdes à directrice circulaire. Paris, 1867, gr. in-8°.
— Les Cristalloïdes complexes à sommet étoilé. Paris, 1873, gr. in-8°.
— Essai sur la Géométrie des Cristalloïdes. Paris, 1873, gr. in-8°.
— La question de l'Equidomoïde et des Cristalloïdes géométriques. Paris, 1875, gr. in-8°.

F. I. C. — *Appendice aux Exercices de Géométrie.* Tours, 1877, in-12.