

# Curiosités géométriques

Fourrey, Émile (1869-1959). Auteur du texte. Curiosités géométriques. .

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

cercle ; la mâchoire de crocodile vous fera souvenir des pointes que l'on uniformise en les aplatissant au tiers. »

## BIBLIOGRAPHIE

Voir à la fin du chapitre.

## § 3. — Géométrie Hugodomoïdale.

« L'équidomoïde, dompteur de sphères. »  
 « L'équidomoïde est comme le soleil : aveugle qui ne le voit pas ! »  
 « L'École hugodomoïdale est vraiment l'École romantique de la Géométrie. »  
 « La sphère n'a plus qu'à se dégonfler... ou à se résigner au rôle d'Équidomoïde limite. »  
 « Analyste ! rends hommage à la Vérité, sinon l'Équidomoïde vengeur viendra peser, la nuit, sur ta poitrine anxieuse. »

*Projet d'affiche :*

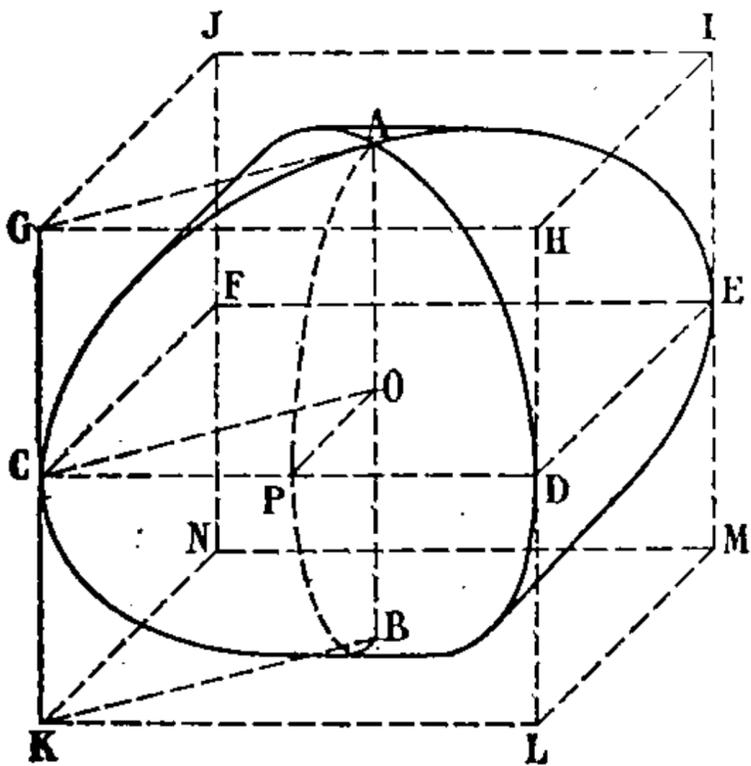
« Jeunes élèves !  
 N'écoutez pas ce farceur d'Équidomoïde  
 Lequel prétend démolir notre sphère et veut  
 [dégommer Archimède]  
 Sans craindre ses ongles, courons sus à l'Equido...  
 [géométrique].  
 Tombons tous sur l'excentrique  
 A coups de trique !  
 Muera ! »  
 C\* Léopold Hugo.

Le comte LÉOPOLD HUGO, neveu de notre grand poète, a publié dans plusieurs brochures, de 1867 à 1875, diverses recherches sur une catégorie de solides qu'il avait été amené à étudier par des considérations de minéralogie et qu'il a en conséquence dénommés « cristal-loïdes ». Bien que ces recherches présentent un certain intérêt théorique et pratique, elles n'ont été signalées dans aucun ouvrage de géométrie, du moins à notre connaissance. Il convient de dire d'ailleurs que l'originalité — pour ne pas dire pis — du style de l'auteur, dont nous avons donné en épigraphe quelques échantillons, et qui dans son esprit devait attirer l'attention sur ses études, a plutôt nui à leur diffusion.

Contrairement à ce qu'il pensait, Léopold Hugo n'est

pas le premier qui se soit occupé de cette nature de solides ; lui, qui, en apparence tout au moins, avait déclaré la guerre à la géométrie dite « archimédienne », eût sans doute été fort marri d'apprendre qu'un mathématicien — non des moindres — s'en était déjà occupé avant lui, et que ce mathématicien était précisément... ARCHIMÈDE. La publication récente des Métriques de Héron d'Alexandrie a en effet permis de constater que le géomètre syracusain s'était occupé au moins d'un cas particulier de la question dans ses *Ephodiques*.

**Équidomoïdes.** — Considérons un cube  $GHIJ...$  ; soit  $APB$  une demi-circonférence dont le diamètre est la droite  $AB$  joignant les centres des deux bases du cube et dont le plan est perpendiculaire à l'arête  $KL$ . Admet-

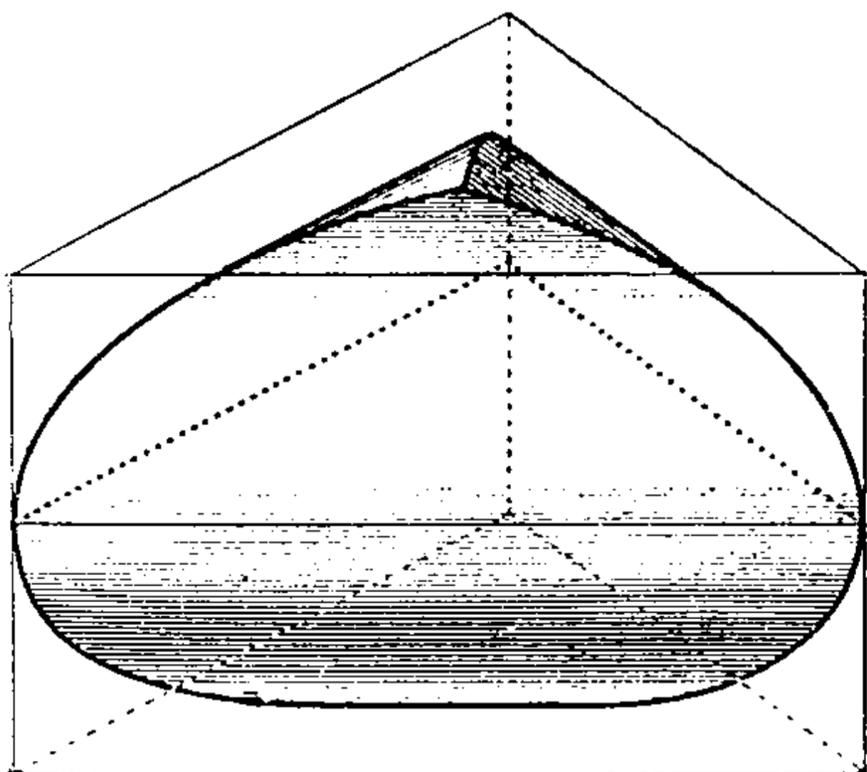


tons maintenant qu'une droite  $CP$  se déplace parallèlement à  $KL$  de telle sorte que son extrémité  $P$  reste sur la demi-circonférence  $APB$ . Dans son mouvement, cette droite engendre une surface cylindrique qui, limitée aux plans  $APB$  et  $ACB$ , est un *onglet*. Si l'on réunit 8 onglets identiques, on forme le solide de la figure,

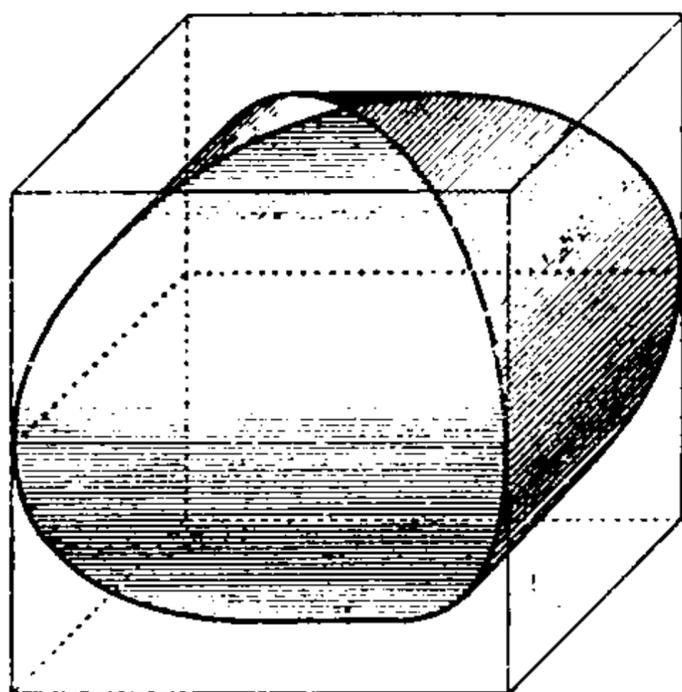
qui est un *équidomoïde* à base carrée  $CDEF$  ; ce solide coupé par le plan  $CDEF$  donne le contenu d'une voûte dite en « arc de cloître ».

On peut obtenir d'une manière analogue un équidomoïde ayant pour base un polygone régulier quelconque. Nous donnons ci-après la série des équidomoïdes ayant pour base un triangle équilatéral, un carré, un penta-

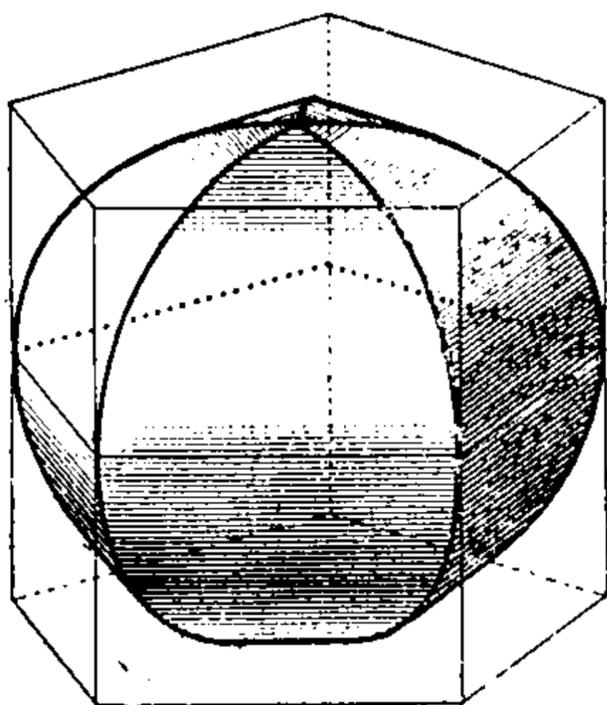
gone, ..., et un cercle ayant même rayon que la demi-circonférence directrice; dans ce dernier cas, le solide engendré devient une sphère. On peut donc considérer la sphère comme un équidomoïde limite.



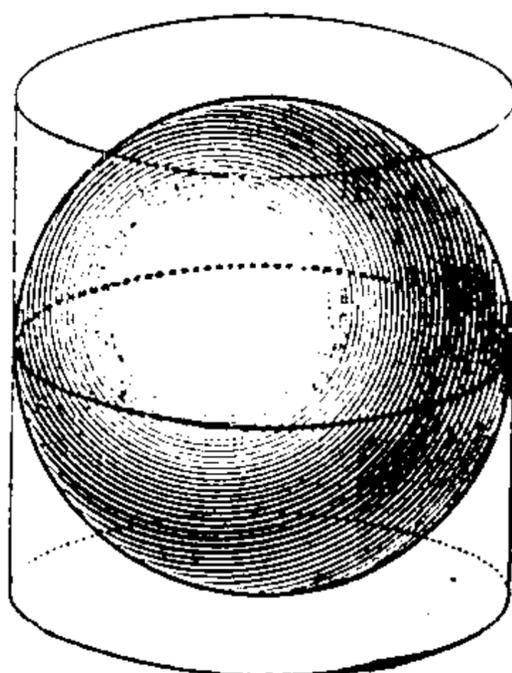
Base triangulaire.



Base carrée.



Base pentagonale.

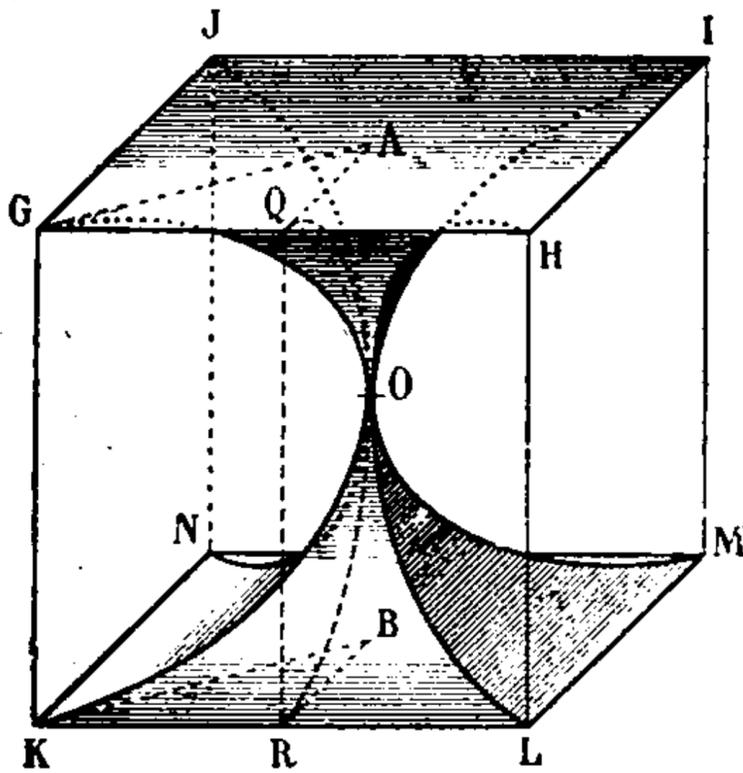


Base circulaire (sphère).

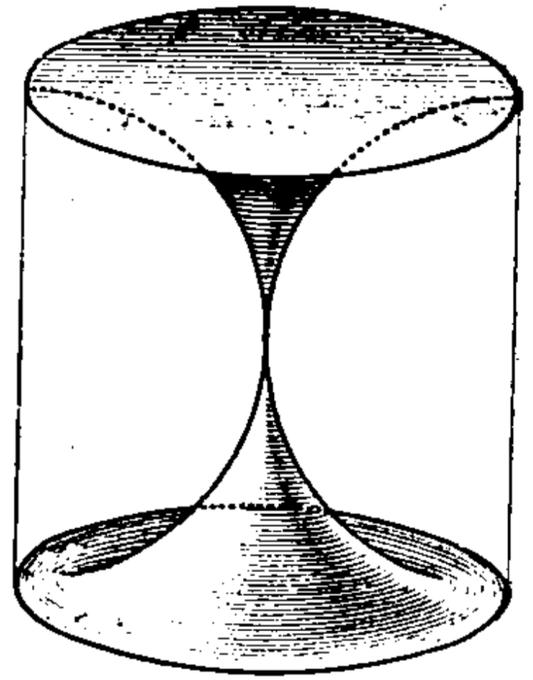
Équidomoïdes réguliers.

**Équitrémoïdes.** — On peut imaginer une autre espèce de solides engendrés comme les équidomoïdes par une droite se déplaçant parallèlement à elle-même en sui-

vant une demi-circonférence, mais celle-ci étant tangente en  $O$  à l'axe  $AB$  : ce sont les *équitrémoïdes*.



Base carrée.



Base circulaire.

Équitrémoïdes réguliers.

L'équitrémoïde limite, à base circulaire, correspondant à la sphère des équidomoïdes, a, comme on le voit, la forme d'un sablier.

**Des cristalloïdes en général.** — Si la directrice est une courbe quelconque au lieu d'être une demi-circonférence, le solide formé par la réunion des onglets ainsi engendrés porte dans ce cas général le nom de *cristalloïde*.

En particulier, si la directrice est une demi-ellipse, on aura un *ellidmoïde* ou un *ellitrémoïde* suivant que cette demi-ellipse aura ou non sa concavité tournée vers l'axe.

On aura, au contraire, soit un *hyperdomoïde* ou un *hypertrémoïde*, soit un *paradomoïde* ou un *paratrémoïde* selon que cette directrice sera une branche d'hyperbole ou une parabole.

Tous ces solides sont caractérisés par la simplicité

des expressions de leur surface et de leur volume lorsque leur base  $B$  et leur hauteur  $H$  sont connues ; ces expressions sont en effet une fraction numérique du produit  $BH$ . Nous nous contenterons de le montrer pour le cas de l'équidomoïde.

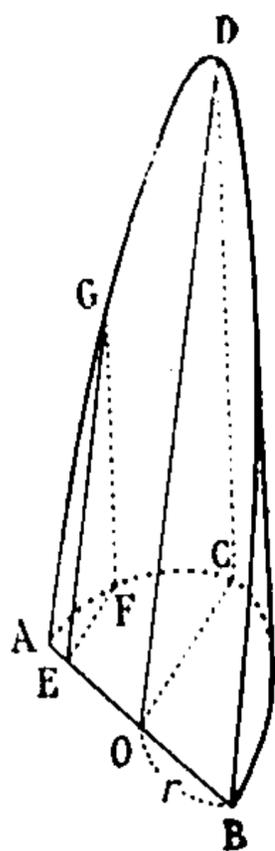
**Volume de l'équidomoïde.** — L'équidomoïde étant formé par l'assemblage d'onglets cylindriques égaux, nous allons d'abord chercher le volume d'un de ces onglets.

I. — Soit d'abord un onglet  $ABCD$  dont la base est un demi-cercle de rayon  $r$  et de centre  $O$ , et dont la hauteur  $CD$  est égale à la circonférence du cercle de même rayon, soit à  $2\pi r$ .

Menons un plan quelconque  $EFG$  perpendiculaire à  $AB$  ; il coupe l'onglet suivant un triangle rectangle  $EFG$  semblable à  $OCD$  puisque les angles en  $E$  et en  $O$  sont égaux. On a

$$\frac{GF}{EF} = \frac{DC}{OC} = 2\pi, \quad \text{d'où} \quad GF = 2\pi EF.$$

Il en résulte que la surface du triangle  $EFG$  est équivalente à celle du cercle de rayon  $EF$ .



Supposons maintenant qu'on divise  $AB$  en un certain nombre de parties égales et qu'on mène par les points de division des plans perpendiculaires à  $AB$ . Nous partageons ainsi l'onglet en volumes élémentaires que nous pourrions assimiler à des prismes si nous faisons croître indéfiniment le nombre des divisions de  $AB$ , et dont les bases seront des triangles analogues à  $EFG$ . Ces prismes, d'après la remarque faite ci-dessus, seront équiva-

lents à des cylindres de même hauteur et dont les rayons de base seront les segments  $EF$ . La

somme de ces cylindres donnant une sphère de rayon  $r$ , le volume de l'onglet sera équivalent à celui de cette sphère, soit à  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

II. — Soit à présent un onglet de volume  $v$ , dont le rayon de base est  $r$  et dont la hauteur  $h$  est quelconque. Nous allons le comparer à l'onglet de même base, de hauteur  $2\pi r$  et de volume  $V$ . Les triangles de section ayant même base, sont entre eux comme leurs hauteurs, c'est-à-dire dans le rapport  $\frac{h}{2\pi r}$ ; il en est de même des cylindres élémentaires et par suite des volumes des onglets. On a donc

$$\frac{v}{V} = \frac{h}{2\pi r}, \quad \text{d'où} \quad v = V \frac{h}{2\pi r} = \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{h}{2\pi r} = \frac{2}{3} r^2 h.$$

Ainsi le volume de l'onglet cylindrique a pour expression  $\frac{2}{3} r^2 h$ .

III. — Soit enfin un équidomoïde régulier dont la base a  $n$  côtés de longueur  $2h$ ; désignons par  $r$  le rayon du cercle inscrit à cette base. L'équidomoïde se compose alors de  $2n$  onglets ayant  $r$  pour rayon de base et  $h$  pour hauteur, et dont le volume est, d'après ce qu'on vient de voir,

$$2n \times \frac{2}{3} r^2 h = \frac{2}{3} \times nhr \times 2r.$$

Mais  $nhr$  représente la surface  $B$  de la base et  $2r$  la hauteur  $H$  de l'équidomoïde; le volume de ce dernier est par suite exprimé par la formule très simple

$$\frac{2}{3} BH.$$

Ce volume est donc, comme pour la sphère, les  $\frac{2}{3}$  de celui du cylindre circonscrit.

**Surface de l'équidomoïde.** — Cherchons d'abord à déter-

miner l'expression de la surface latérale d'un onglet, dans les mêmes cas qu'au n° précédent.

I. — La surface latérale de l'onglet (fig. de la p. 323) peut être considérée comme formée d'une infinité de rectangles ayant pour bases les droites  $GF = 2\pi EF$ ; chacun de ces rectangles est équivalent à la surface latérale d'un cylindre circulaire de même hauteur et dont le rayon de base est une longueur  $EF$ . La somme des surfaces de ces cylindres étant équivalente à celle d'une sphère de rayon  $OC$  ou  $r$ , soit à  $4\pi r^2$ , la surface cherchée a la même valeur.

II. — On a, comme dans le cas du volume,  $s$  et  $S$  désignant respectivement les surfaces latérales d'un onglet quelconque et d'un onglet de hauteur  $2\pi r$ ,

$$\frac{s}{S} = \frac{h}{2\pi r}, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{Sh}{2\pi r} = 2rh.$$

III. — La surface de l'équidomoïde régulier composé de  $2n$  onglets a donc pour expression

$$2n \times 2rh = 2nh \times 2r = PH,$$

si l'on désigne par  $P$  le périmètre de la base et par  $H$  la hauteur du solide.

Cette surface est donc, comme pour la sphère, équivalente à la surface latérale ou aux  $2/3$  de la surface totale du cylindre circonscrit.

**L'équidomoïde chez Archimède.** — Dans ses *Ephodiques*, ARCHIMÈDE a déterminé, assurément pour la première fois, le volume de l'onglet cylindrique, mais on ne sait quel procédé il a employé. Comme application, il a montré dans le même ouvrage que le solide commun à deux cylindres circulaires pénétrant l'un dans l'autre et dont les bases sont inscrites dans deux faces opposées

d'un cube a pour valeur les  $\frac{2}{3}$  du volume du cube. Ce solide commun est ce que nous avons appelé l'équidomoïde à base carrée et la valeur trouvée par Archimède est bien celle qui résulte de l'application de la formule  $\frac{2}{3} BH$  donnée plus haut.

## BIBLIOGRAPHIE

Voir à la fin du chapitre II (2<sup>e</sup> Partie).

- BAILLARGÉ. — *Le Stereometricon*. Québec, 1884, in-4°.
- CASIMIR REY. — *Omniformule de cubature*. J<sup>al</sup> de Longchamps, 1886.
- GOULARD. — *Sur la formule des trois niveaux*. Mathesis, 1897.
- NICOLO TARTAGLIA. — *General trattato di numeri et misura*. Venise, 1556-1560, in-fol.
- F. PEYRARD. — *Œuvres d'Archimède* (traduites par). Paris, 1807, in-4°.
- EDOUARD LAGOUT. — *Cahier d'un soldat du génie*. Paris, 1876, in-8°.
- C<sup>te</sup> LÉOPOLD HUGO. — *Théorie des Cristalloïdes élémentaires*. Paris, 1867, gr. in-8°.
- Les Cristalloïdes à directrice circulaire. Paris, 1867, gr. in-8°.
- Les Cristalloïdes complexes à sommet étoilé. Paris, 1873, gr. in-8°.
- Essai sur la Géométrie des Cristalloïdes. Paris, 1873, gr. in-8°.
- La question de l'Equidomoïde et des Cristalloïdes géométriques. Paris, 1875, gr. in-8°.
- F. I. G. — *Appendice aux Exercices de Géométrie*. Tours, 1877, in-12.