La loi de la croissance cumulée

Dans la loi de la croissance cumulée apparaissent à la fois pourcentages et puissances : avoir en tête les ordres de grandeur mis en jeu permet d'appréhender efficacement les phénomènes de croissance sur le long terme.

Pourcentages.— Si l'on vous affirme que la croissance de vos revenus sera de 3% par an durant les 10 prochaines années, qu'est-ce-que cela signifie ? Disons que cette année vos revenus s'élèvent à 17000 euros nets. Alors l'an prochain, ils s'élèveront à 17000 euros plus 3 centièmes de cette somme ; s'ajouteront donc

$$17000 \times \frac{3}{100} = 170 \times 3 = 510 \text{ euros.}$$

Votre prochain revenu annuel sera donc de 17510 euros. L'année suivante, s'ajouteront à nouveau 3%, mais 3% de 17510, ce qui fera

$$17510 \times \frac{3}{100} = 525.3 = 525 \text{ euros et } 3 \text{ centimes ;}$$

dans deux ans, vos revenus annuels seront donc de $17510 + 525.3 = 18035.3$ euros. L'opération que nous effectuons pour passer d'une année à la suivante est

$$\text{Revenu suivant} = \text{Revenu} + \text{Revenu} \times \frac{3}{100} = \text{Revenu} \times \left(1 + \frac{3}{100}\right).$$

On multiplie donc successivement le revenu initial par $1 + 3/100 = 1.03$. Le revenu dans 7 ans est donc celui de l'année en cours multiplié 7 fois par 1.03. En utilisant les puissances, nous obtenons

$$\text{Revenu dans } 10 \text{ ans} = \text{Revenu actuel} \times (1.03)^7$$

soit $17000 \times (1.03)^7$ euros pour notre exemple. Et dans 10 ans, votre revenu sera de $17000 \times (1.03)^{10}$ euros, ce qui donne

$$17000 \times (1.03)^{10} = 17000 \times 1.34391637934 \simeq 22846.58 \text{ euros}$$

en arrondissant au centime supérieur. Bref, votre revenu passe, sur une décennie, de dix-sept mille à presque vingt-trois mille euros annuels nets. C'est une augmentation substantielle, d'environ 34 % cumulés.

Attention toutefois : la hausse des prix peut contre-balancer la croissance de vos revenus. C'est pourquoi il convient de prendre en compte l'inflation – dans ses plans de carrière comme dans les débats publics – et d'exprimer les revenus en euros constants.

En suivant Thomas Piketty.— Ce que nous venons d'illustrer est la *loi de croissance cumulée* : cette expression est le titre d'un paragraphe du livre de Thomas Piketty intitulé *Le capital au XXI*e *siècle*. Laissons lui la parole, en reprenant un passage du second chapitre de son livre :

« La loi de croissance cumulée, c'est le fait qu'une croissance annuelle faible cumulée sur une très longue période conduit à une progression considérable. Concrètement, la population mondiale a progressé d'à peine $0,8\%$ par an en moyenne entre 1700 et 2012. Mais, cumulé sur trois siècles, cela a tout de même permis de multiplier la population mondiale par plus de dix. Autrement dit, la planète comptait environ 600 millions d'habitants autour de 1700, et plus de 7 milliards en 2012. Si ce rythme devait se poursuivre

Tableau 2.2. La loi de la croissance cumulée

Un taux de croissance annuel égal à…	..équivaut à un taux de croissance générationel (30 ans) de...	…soit une multiplication au bout de 30 ans par un coefficient de…	…une multiplication au bout de 100 ans par un coefficient de…	… et une multiplication au bout de 1000 ans par un coefficient de…
0,1%	3%	1,03	1,11	2,72
0,2%	6%	1,06	1,22	7,37
0,5%	16%	1,16	1,65	147
1,0%	35%	1,35	2,70	20 959
1,5%	56%	1,56	4,43	2 924 437
2,0%	81%	1,81	7,24	398 264 652
2,5%	110%	2,10	11,8	52 949 930 179
3,5%	181%	2,81	31,2	…
5,0%	332%	4,32	131,5	…

Lecture: Un taux de croissance de 1% par an équivaut à une croissance cumulée de 35% par génération (30 ans), une multiplication par 2,7 tous les 100 ans, et par plus de 20 000 tous les mille ans.

FIGURE 1. Tableau 2.2 extrait du livre *Le capital au XXI*e *siècle*.

dans les trois siècles à venir, alors la population mondiale dépasserait les 70 milliards vers 2300.

Afin que chacun puisse se familiariser avec les effets explosifs de la loi de croissance cumulée, nous indiquons dans le Tableau 2.2 la correspondance entre les taux de croissance mesurés pour une année (ce qui est le mode de présentation habituel) et les progressions obtenues pour des périodes plus longues. Par exemple, un taux de croissance de 1% par an correspond à une progression de 35% au bout de trente ans, une multiplication par près de trois au bout de cent ans, par vingt au bout de trois cents ans, et par plus de vingt mille au bout de mille ans. »

Une estimation et un problème.— Pour avoir une idée grossière de la croissance cumulée à moyenne échéance, il est utile de savoir qu'une croissance de $A\%$, où A est un nombre positif (par exemple $A = 3$ ou $0,8$) donne une croissance d'au moins $(nA)\%$ après n années. Autrement dit, quelques soient le pourcentage $A \geq 0$ et le nombre d'années n, la comparaison

$$\left(1+\frac{A}{100}\right)^n \geq 1+\frac{nA}{100}$$

est toujours satisfaite. Ceci peut être établi *par récurrence* : tout d'abord, cette inégalité est valable lorsque $n = 1$, car dans ce cas c'est une égalité, par définition de $(1 + A/100)^1$.

Supposons ensuite que l'inégalité est satisfaite à l'année n ; pour $n + 1$ nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{A}{100}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{A}{100}\right)^n \times \left(1+\frac{A}{100}\right)\\ &\geq \left(1+\frac{nA}{100}\right) \times \left(1+\frac{A}{100}\right).\end{aligned}$$

En distribuant le produit nous obtenons

$$\left(1+\frac{A}{100}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{nA}{100}\right) + \left(1+\frac{nA}{100}\right) \times \frac{A}{100}$$

puis en minorant $\left(1+\frac{nA}{100}\right)$ par 1, il vient

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{A}{100}\right)^{n+1} &\geq \left(1+\frac{nA}{100}\right)+\frac{A}{100}\\ &\geq 1+\frac{(n+1)A}{100}.\end{aligned}$$

Ceci établit donc l'inégalité annoncée pour $n+1$, et donc finalement pour tout nombre d'années n *par récurrence*.

Par exemple, pour une croissance annuelle de 0.5%, on doit prendre $A=0.5$ et on trouve qu'au bout de trente ans la croissance est au moins de $30\times(0.5)=15$ pour cent, ce qui est juste en dessous des 16% mentionnés dans le Tableau 2.2. Pour une croissance de 1.5% par an sur trente ans, on trouve la minoration par $30\times(1.5)=45$ pour cent ; c'est assez loin des 56% effectifs reportés dans le tableau. En fait, plus n et A sont grands, plus l'écart entre $(1+A/100)^n$ et $1+nA/100$ est important.

Voici maintenant un problème simple : la population de la France est passée de 40.69 millions d'habitants environs en 1940 à 64.61 millions en 2010 ; à quelle croissance annuelle moyenne cela correspond-il ? Autrement dit, si la croissance annuelle était restée constante sur cette période de 70 ans, quelle serait sa valeur ? Il s'agit de trouver un pourcentage $A\%$ tel que

$$64.61=(1+A/100)^{69}\times 40.69$$

ce qui revient à dire que $(1+A/100)^{69}=(64.61)/(40.69)$, soit $(1+A/100)^{69}=1.59$ environ. Il s'agit donc de résoudre une équation de la form $a^n=b$ avec ici $a=1+A/100$, $b=1.59$ et $n=69$; on veut donc « extraire la racine 69-ème » de 1.59.

À l'aide d'une calculatrice, on trouve $1+A/100=1.0067$, soit $A=0.67$. La croissance annuelle moyenne est donc de 0.67%. Mais là, il s'agit de croire sa calculatrice, et d'ailleurs les petites calulettes permettent rarement d'effectuer cette opération. D'où l'intérêt de comprendre comment extraire des racines !