

Les Riches Caravanes de Sa-Shah

Exemples de graphes orientés avec coûts

27 novembre 2022

Bienvenue dans l'espace de relecture collaborative de Images des Mathématiques. C'est ici que vous pourrez participer au processus éditorial de la revue. Le but n'est pas de décider du sort de ce texte (la décision finale revient au comité de rédaction !) mais bien de collaborer avec l'auteur afin de rendre son article le plus lisible possible.

Concrètement, que faut-il faire ? D'abord lire attentivement l'article. Ensuite, indiquez à l'auteur si l'article est compréhensible. Éventuellement, signalez précisément les points que vous ne comprenez pas. Enfin, vous pouvez aussi adresser à l'auteur quelques suggestions d'amélioration.

Techniquement, un forum, disposé en bas de cette page, vous permet de dialoguer avec l'auteur et avec les autres relecteurs. Utilisez-le pour faire vos commentaires sur l'article.

Voici le texte de l'article, présenté tel qu'il le serait sur la partie publique du site s'il était publié en l'état. Bonne lecture !



Si suivant l'adage « un petit dessin vaut mieux qu'un long discours », en mathématiques, un graphe vaut mieux que de longs calculs. Cet article montre quelques exemples de calculs de coût sur un graphe qui résume un ensemble de considérations en apparence éloignées les unes des autres.

LES CARAVANES ET LES NOTES DE FRAIS

Jadis, de nombreuses, lourdes et longues caravanes sillonnaient les pistes du prospère royaume d'Ekuidistan. Le très avisé Khan assurait la protection des marchands, qui en contrepartie s'acquittaient d'un octroi dans chaque ville où ils passaient, proportionnel au

nombre de personnes, de chevaux, de chameaux et de dromadaires. De plus ils devaient respecter les routes imposées et leur sens de circulation, comme indiqué par ce graphe :

- Les cercles figurent les villes et leurs contenus le prix de l'octroi en roupies ;
- Les flèches montrent les routes possibles avec le sens à respecter.

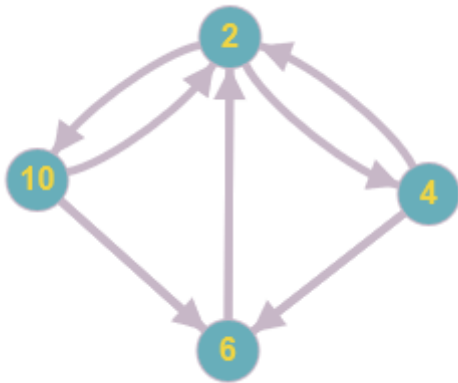


Figure 1 : carte des octrois du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

Les trois chefs-caravaniers, Po-Lo, Ja-Ko et Ar-No, remettent leurs rapports annuels à leur maître Sa-Shah :

« Nous avons sillonné tout le pays et amassé de grandes fortunes. Chacun menait sa caravane. Nous sommes partis de trois villes différentes, puis après de longs mois, nous sommes revenus à nos points de départ. Po-Lo a payé un total de 1 514 roupies d'octroi au Grand Khan. Ja-Ko : 1 824 roupies. Et Ar-No : 1 716 roupies. » Sa-Shah regarde gravement la carte des octrois et les notes de frais. Il demande : « Avez-vous embauché ou débauché du personnel en cours de route ?

— Non !

— Avez-vous vendu ou acheté des bêtes ?

— Non ! »

Sa-Shah, après un pesant silence, annonce : « Je vous félicite du magnifique travail accompli, cependant je constate avec une infinie tristesse que l'un de vous s'est trompé dans ses comptes ! »

Comment le savant Sa-Shah a-t-il pu détecter aussi rapidement une erreur ? Qui passera sa nuit à corriger ses notes de frais ?

LES OUTILS MATHÉMATIQUES DE SA-SHAH

Sa-Shah utilise des bases mathématiques assez variées. Passons-les en revue.

Graphes orientés et coûts

La carte constitue un exemple de graphe constitué de nœuds pour symboliser les villes et d'arcs orientés pour les routes avec leur sens de circulation. Si l'on va d'une ville à une autre, et que l'on répète l'opération, on suit un chemin. Si les deux villes sont identiques, on parle de

circuit (à condition qu'il y ait au moins un arc). Ici on peut parler de coûts d'un chemin. Normalement ces coûts sont attachés aux arcs. Le Grand Khan a simplifié leur écriture en les écrivant dans les nœuds. Un graphe plus rigoureux serait le suivant :

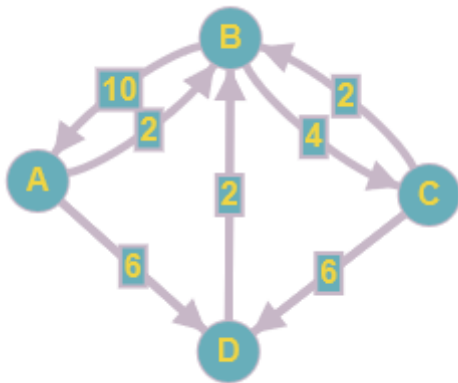


Figure 2 : carte corrigée des octrois du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

Le sage Sa-Shah étudie donc les coûts des trois circuits de ses trois chefs-caravaniers sur un graphe orienté.

Propriété de ces graphes orientés

La carte des octrois est un graphe tout à fait ordinaire, mais qui propose une propriété intéressante :

Si vous avez parcouru un circuit, vous aurez payé un coût divisible par 6.

Et ceci quel que soit le point de départ choisi. Repasser plusieurs fois sur le même point de départ ou augmenter le nombre d'étapes n'altèrent pas cette propriété. On note toutefois que Sa-Shah reste attentif et vérifie que les parcours se font à effectifs constants : chaque humain ou bête a fait un circuit complet.

Sa-Shah se souvient qu'un nombre est divisible  si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3. La première condition est respectée par les trois caravaniers car les trois sommes avancées sont paires. Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est lui aussi divisible par 3 :

- Po-Lo : 1 514 roupies. Or $1+5+1+4=11$. Puis $1+1=2$ qui n'est pas divisible par 3.
- Ja-Ko : 1 824 roupies. Or $1+8+2+4=15$. Puis $1+5=6$ divisible par 3.
- Ar-No : 1716 roupies. Or $1+7+1+6=15$. Puis $1+5=6$ divisible par 3.

Le procédé peut donc s'itérer. On peut aussi aller plus vite en supprimant en cours de route les sommes partielles divisibles par trois. Par exemple, dans $1+7+1+6$, on enlève $1+7+1=9$ qui est divisible par 3. Il ne reste que 6 qui est divisible par 3. Pour quelqu'un d'entraîné et

de rompu à ce genre d'astuces, vérifier qu'un nombre même très long est divisible par 3 est rapide. Pour Ja-Ko et Ar-No, on ne peut pas conclure à coup sûr sur leur totale rigueur. Ils auraient pu se tromper d'un montant multiple de trois, mais Sa-Shah leur laisse le bénéfice du doute. Cependant Po-Lo a évidemment commis une erreur, voire plusieurs.

Le problème en $(3x+1)/2$

Un système d'équation peut lui aussi être représenté par un graphe. Ici, il repose sur ce qui est appelé le « problème de Syracuse », le « problème en $(3x+1)/2$ » ou « problème de Collatz ». On passe d'un terme X à un autre Y en respectant les deux règles suivantes :

1. Si X est pair, alors $Y=X/2$;
2. Sinon $Y=(3X+1)/2$.

Ainsi pour 11, le terme suivant sera 17. Si on répète l'opération on obtient : 17,26,13,20,10,5,8,4,2 et 1. On peut se demander si l'on peut avoir un terme (en réalité un circuit complet) qui se répète à l'infini. On ne connaît que ces « circuits » :

- 1,2...
- 0...
- -1...
- -5,-7,-10...
- -17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34...

On note qu'un seul cycle (ou circuit) est connu pour les nombres strictement positifs.

Il en existe trois autres pour les nombres négatifs. Il existe une propriété peu connue pour tous ces cycles. (Si par chance, on en trouvait d'autres, eux aussi la respecteraient.)

Pour un cycle, la somme des termes pairs P est égale à celle des termes impairs I plus le nombre N de ces termes impairs.

Soit la propriété remarquable :

$$P=I+N$$

En annexe figure un résumé de la démonstration. En réalité on utilisera la propriété remarquable sous une seconde forme :

$$P-I'=0$$

Où P reste la somme des termes pairs et I' est la somme de tous les termes impairs augmenté de 1. Ainsi sur un graphe, on aura une lecture rapide du coût d'un circuit.

Graphe du problème en $(3x+1)$

La littérature abonde sur un problème similaire et qui se définit par :

1. Si X est pair, alors $Y=X/2$;
2. Sinon $Y=3X+1$.

Seule la règle 2 est modifiée. De nombreux graphes sont disponibles sur le web. En voici un exemple :

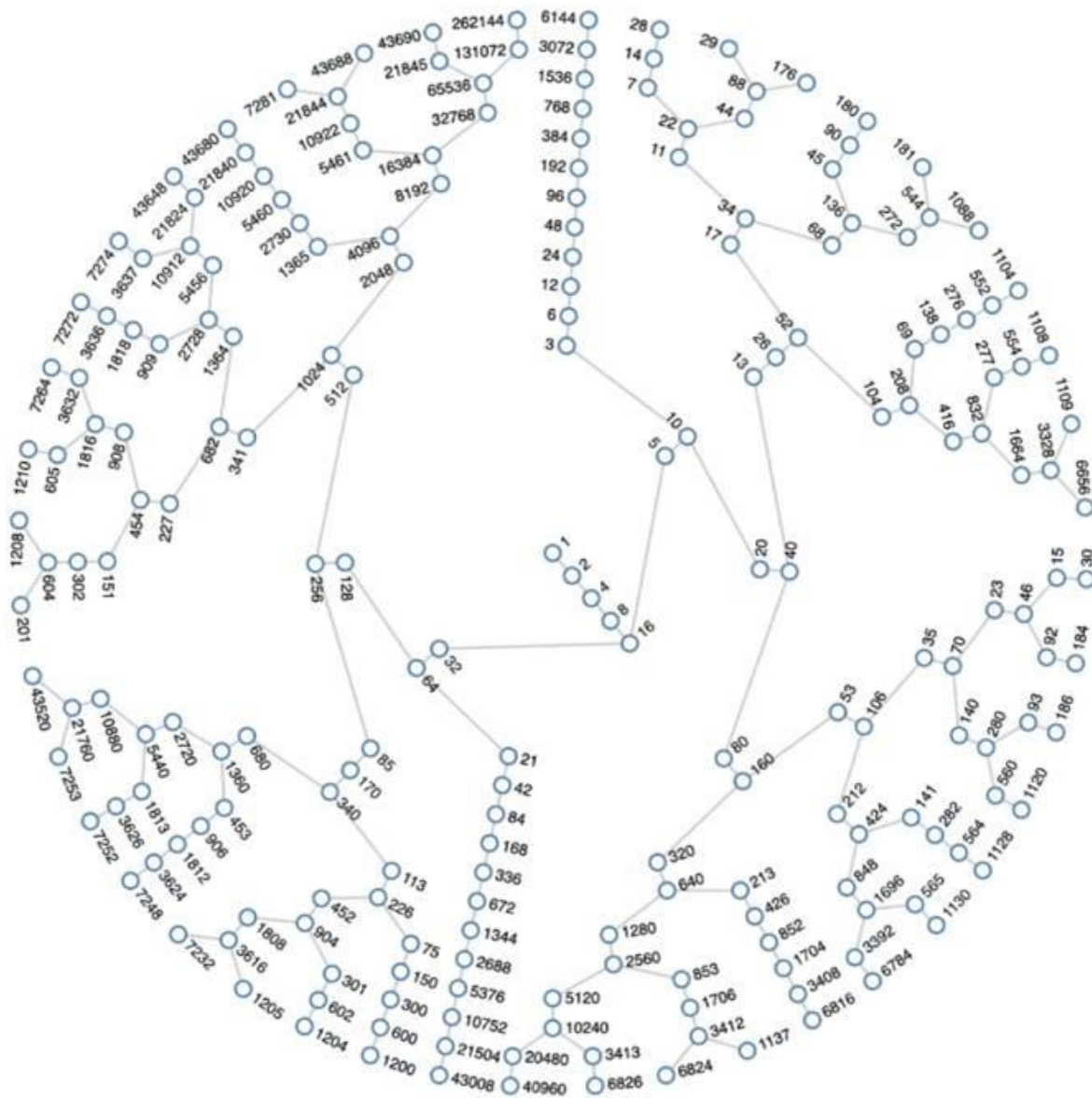


Figure 3 : graphe du problème en $3x+1$ (extrait).

Il s'agit d'un graphe orienté (il faut y ajouter les flèches allant de l'extérieur vers le centre), où seules figurent quelques valeurs, car le graphe complet a une taille infinie :

1. chaque valeur possible prend place dans un nœud ;
2. chaque successeur est relié à son parent par une flèche allant du parent à son successeur ;

3. chaque valeur n a qu'un seul successeur ;
4. par contre le nombre de parents est soit 1 soit 2.

On peut parler de graphe de transitions figurées par les flèches.

Arithmétique modulaire

On peut traiter le problème $(3x+1)/2$ en arithmétique modulaire. Ainsi on choisit un nombre M (de préférence pair pour simplifier l'étude) et l'on transforme tous les nombres par leurs restes vus par la division euclidienne par M . Si l'on considère égaux les nombres ayant les mêmes restes (Sa-Shah diraient les « restes chinois », car les mathématiciens de ce pays avaient étudié ce sujet au moins avant le troisième siècle de notre ère), on s'aperçoit que les opérations arithmétiques (addition, mais aussi soustraction, multiplications et divisions) restent vraies. Prenons un exemple. L'égalité :

$$5+8=13$$

devient modulo 6 :

$$5+2=1 \text{ modulo } 6$$

Car le reste de la division euclidienne de 13 par 6 donne 1. Pour 8, ce reste est 2.

$$7 \equiv 1 \text{ modulo } 6$$

Car le reste de la division euclidienne de 7 par 6 donne 1.

Appliquons l'arithmétique modulaire sur le problème en $(3x+1)/2$ modulo 6, sur l'ensemble des nombres entiers positifs et traçons un graphe orienté :

1. On n'a plus que 6 nœuds (soit ici $M=6$), correspondant aux six restes possibles. On peut les noter 0,1,2,3,4 et 5.
2. Cependant on a douze transitions (soit $2M=12$).

Les démonstrations sont présentées en annexe.

On obtient le graphe suivant :

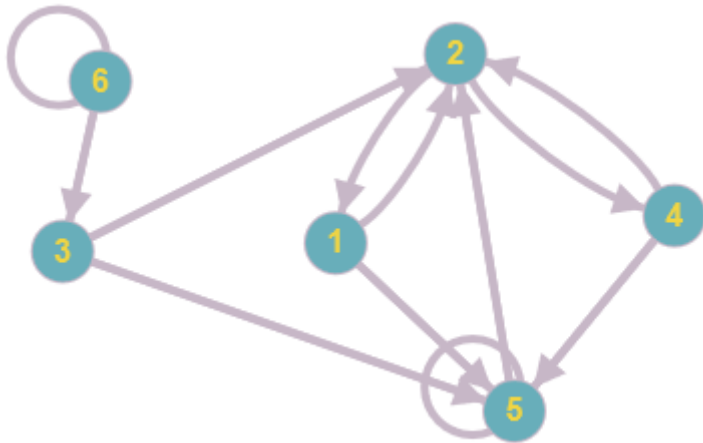


Figure 4 : graphe de Collatz modulo 6.

Ce graphe présente tous les cas possibles du problème en $(3x+1)/2 \dots$ modulo 6.  Toutefois, pour Sa-Shah, cela ne donne pas totale satisfaction pour trouver nos circuits :

- On peut enlever les arcs $(5-5)$ et $(6-6)$ qui n'ont aucun intérêt pour les caravaniers,
- Ainsi que les nœuds 3 et 6 où il est impossible d'y revenir.

(La simple lecture du graphe montre qu'un cycle de Collatz ne peut pas comporter de nombre divisible par 3 : propriété que l'on peut le vérifier sur ceux vus plus haut.) 

On obtient un graphe plus simple qui respecte la propriété remarquable modulo 6.

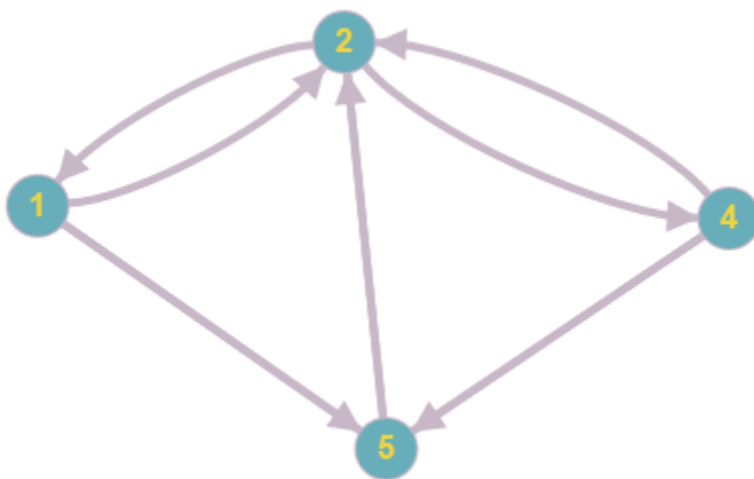


Figure 5 : graphe simplifié de Collatz modulo 6.

Ainsi le cycle $(2,1,5)$ respecte la règle car :

$$PIN === 21 + 52 = 6$$

Donc on vérifie la propriété remarquable sous sa première forme $P=I+N$ modulo 6 :

$$222 \equiv 6 + 20 + 22 \pmod{6}$$

Mais il est possible d'avoir un graphe plus simple à lire, en appliquant la Propriété remarquable vue plus haut sous sa seconde forme. Aussi on fait les trois types de transformation sans changer la propriété remarquable :

1. Changer de signe à tous les termes impairs (1 devient -1 et 5 : -5) ; la propriété remarquable devient $P-I=N$.
2. Enlever 1 à tous les termes impairs (-1 devient -2 , et -5 : -6 ; la propriété remarquable devient $P-I'=0$. On a supprimé N du graphe et de la propriété remarquable.
3. On ajoute un multiple de 6 à tous les termes négatifs (-2 devient 4 ou 10, et -6 : 6 ou 12). Rien n'empêche de faire cette transformation sur ceux positifs.

Résumons par un tableau les différentes étapes :

Tableau de transformations des valeurs des nœuds

Valeur initiale	Parité	Valeur finale
0	Pair	Pas utilisé
1	Impair	$12-(1+1)=10$
2	Pair	2
3	Impair	Pas utilisé
4	Pair	4
5	Impair	$12-(5+1)=6$

Voilà transformé notre graphe de Syracuse modulo 6 qui devient la carte des octrois lue par Sa-Shah plus haut !

MÉTHODES D'AGRANDISSEMENTS DES GRAPHEs

Une fois un tel graphe disponible, il est très facile de le modifier et de l'agrandir. Voyons quelques moyens 

Ajouter des villes et des pistes

Il existe plusieurs moyens. Ici on propose la méthode suivante. Pour ajouter des nœuds (c'est-à-dire des villes), il suffit de lire l'une des étiquettes et d'y ajouter un multiple de 6. On place le nouveau nœud. Pour ajouter des arcs, il suffit de remarquer que si un arc va de X vers Y , on a le droit de bâtir un autre arc qui va de X modulo 6 à Y modulo 6. En réitérant, le Grand Khan peut « paver » un immense empire, c'est-à-dire dessiner un graphe aussi grand que voulu.

Le graphe ci-dessous montre un exemple en ajoutant le nœud « 12 » qui a les mêmes propriétés que celui en 6 :

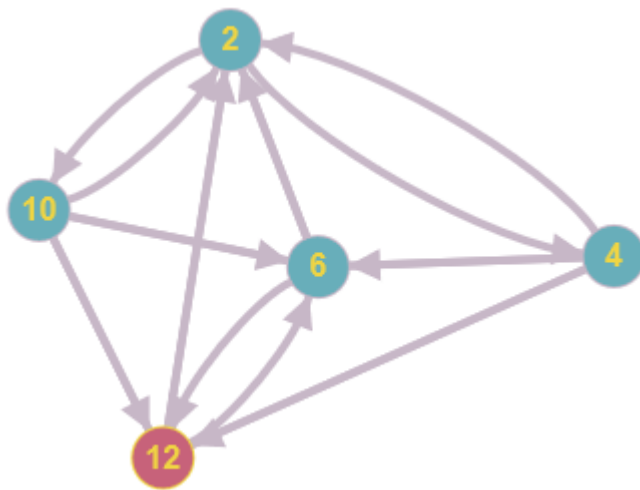


Figure 6 : carte des octrois après l'agrandissement du royaume d'Ekuidistan (en roupies).

Travailler suivant un modulo différent

Travailler modulo 6 (ou un multiple de 6) montre des propriétés intéressantes : certains nœuds sont absents du graphe final (on en déduit qu'il n'y a pas de cycles de Syracuse avec des nombres égaux à zéro modulo 6). Mais on peut bâtir un graphe suivant n'importe quel modulo pair. En travaillant modulo 10, on obtient le graphe brut ci-dessous :

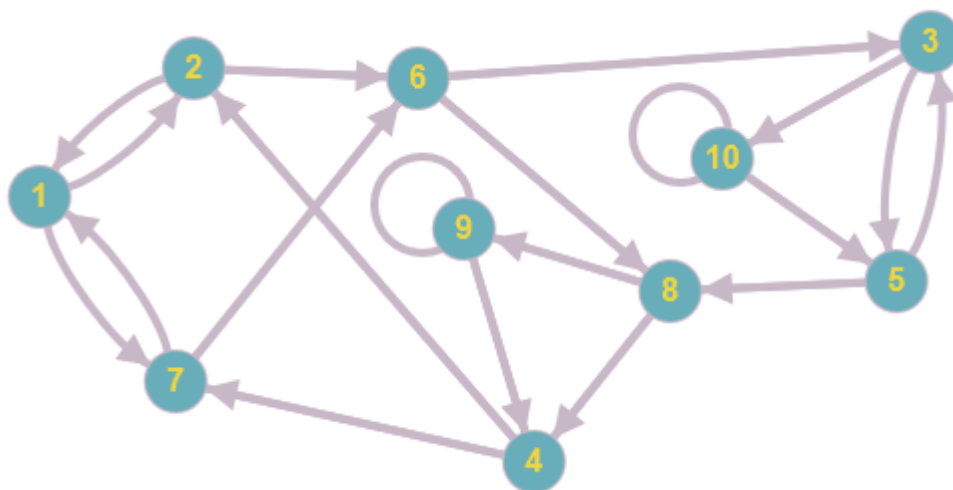


Figure 7 : exemple de graphe « brut » modulo 10.

À nouveau, la propriété $P=I+N$ est peu pratique à lire. Ainsi, la boucle (8-9-4-2-6), se lit :

- $8+4+2+6=9+1$ modulo 10, ou
- $20=10$ modulo 10, ou
- $0=0$ modulo 10.

Si l'on obtient ici le résultat, on veut un graphe plus simple à lire. Utilisons la propriété remarquable sous sa seconde forme $P-I'=0$. Dressons d'abord un tableau :

Tableau de transformations des valeurs des nœuds

Valeur initiale	Parité	Valeur finale
0	Pair	$0+10=10$
1	Impair	$10-(1+1)=8$
2	Pair	2
3	Impair	$20-(3+1)=16$
4	Pair	4
5	Impair	$20-(5+1)=14$
6	Pair	6
7	Impair	$20-(7+1)=12$
8	Pair	8
9	Impair	$30-(9+1)=20$

Puis retraçons le graphe avec les nouvelles valeurs :

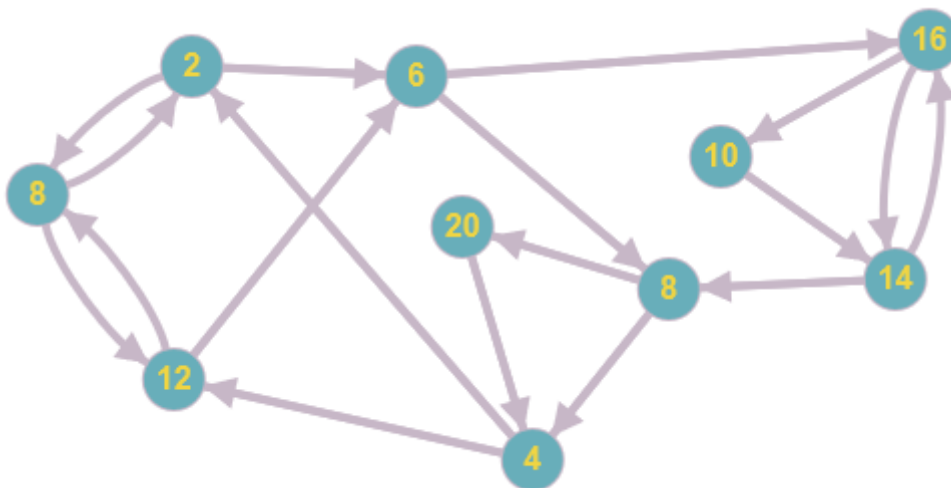


Figure 8 : exemple de carte des octrois modulo 10 (en roupies).

La boucle (8-9-4-2-6) devient (8-20-4-2-6). Appliquons la propriété remarquable sous sa seconde forme. Comme la somme I' intègre le signe – et le compte N, une simple addition suffit :

$$8+20+4+2+6=40=0 \text{ modulo } 10$$

Juste une remarque pour les adeptes de calcul mental : il est inutile de faire l'addition de façon complète. Avec un peu d'habitude, on regroupe les termes de somme égale à 10 :

$$(8+2)+20+(6+4)=10+20+10$$

ce qui donne la simple somme $0+0+0=0$ modulo 10. 

AUTRES PROBLÈMES

Si l'on traite ici le problème en $(3x+1)/2$, on peut envisager tout problème en $(Ax+B)/2$. La Propriété remarquable devient :

$$(A-2).P=I+B.N$$

LA DÉFINITION DES GRAPHS DE SASHA MARTIN

L'Académie royale des sciences exactes d'Ekuidistan s'empara du sujet et approfondissait l'étude des graphes, des matrices et de l'algèbre modulaire. De nombreux graphes furent produits et classifiés. Cependant le très avisé Khan remarqua : « Je ne vois rien là que d'anciens sujets. Dommage, car celui-ci montre beaucoup de subtilité. Trouvez-moi quelque chose ! » Désireux de satisfaire leur puissant mécène, le groupe d'experts *ad-hoc* proposa de définir un nouvel objet mathématique :

On appelle « *Graphe de Sasha Martin* » un graphe orienté dont tout ou partie utilise la Propriété remarquable d'un problème en $(AX+B)/2$ et dont tous les circuits sont à coût nul modulo M.

Vu que l'on peut modifier un tel graphe tout en gardant sa propriété remarquable, les experts s'avisèrent de produire une définition assez large.

CONCLUSIONS

Les graphes sont des outils mathématiques très puissants. Ici on les a combinés à des opérations algébriques simples et mis en évidence des propriétés difficiles à cerner avec d'autres moyens. Ils sont inévitables en physique et notamment en électronique où l'on manipule des opérations plus complexes. Un ensemble d'outils permettant de bâtir des graphes avec des circuits à coûts constants (modulo N) est proposé. Chacun est invité à faire ses propres recherches et à proposer ses propres graphes.

ANNEXES

Diverses démonstrations modulo M

Un graphe orienté d'un problème en $(3X+1)/2$ modulo M demande l'étude de $2M$ valeurs au maximum.

Il suffit de changer X en $X+2M$:

1. X_{pair} :
 1. $Y1=X/2$;
 2. $Y2=(X+2M)/2=X/2+M=X/2 \text{ modulo } M$
2. X_{impar} :
 1. $Y1=3X/2+1/2$
 2. $Y2=(3X+2M+1)/2=3X/2+M+1/2=3X/2+1/2 \text{ modulo } M$

Ainsi pour $M=6$, étudier les transitions pour valeurs allant de 0 à 11 (ou de 1 à 12) suffit.

Un nœud d'un graphe orienté d'un problème en $(3X+1)/2$ modulo M dispose de deux flèches sortantes.

Il suffit de comparer X et $X+M$:

1. X_{pair} :
 1. $Y1=X/2$;
 2. $Y2=(X+M)/2=X/2+M/2$
2. X_{impair} :
 1. $Y1=3X/2+1/2$
 2. $Y2=(3X+M+1)/2=3X/2+M/2+1=3X/2+1/2 \text{ modulo } M$

Les deux nombres issus de X sont distants de $M/2$ pour M pair.

Cependant, pour M impair, si l'on a toujours deux flèches sortantes, les relations ne sont ni aussi simples ni aussi esthétiques.

Ébauche de démonstration de la propriété remarquable $P-I=N$

Si la propriété est lisible en bibliographie, elle y est extrêmement longue (7 pages).

Une autre démonstration existe et on va la commenter avec un exemple. Imaginons que trois termes ($X1$, $X2$ et $X3$) fasse un cycle et que les deux premiers termes soient impairs et le dernier pair. Le cycle peut s'écrire ($I1$, $I2$, $P3$). La description des trois transitions procure un système de trois équations :

me de trois équations :

$$\begin{pmatrix} -3. I_1 + 0 + 2. I_1 + 2. I_2 - 3. I_2 + 0 + 0 + 2. P_3 - 1. P_3 = 1 = 1 = 0 \end{pmatrix}$$

On a simplement appliqué la définition du problème en $(3X+1)/2$ pour chacun des trois termes en tenant compte de la parité :

- L'écriture a une forme matricielle. Un graphe peut toujours être traduit par une matrice.

- On a transformé les relations de la définition de départ en supprimant les dénominateurs. Cela est classique si l'on traite des nombres purement entiers.

De ces trois équations on en produit une quatrième en faisant la somme, suivant chacune des colonnes :

$$(-I_1 - I_2 + P_3 = 2)$$

Cette égalité montre que pour tout cycle on a :

- Le membre de droite de cette nouvelle équation est égal au nombre de termes impairs N ;
- Chaque terme X n'apparaît qu'une fois dans le membre de gauche avec :
 - Un coefficient $+1$ s'il est pair ;
 - Un coefficient -1 s'il est impair.

C'est-à-dire que cette dernière équation montre notre propriété remarquable :

$$P - I = N$$

Avec P : la somme des termes pairs, I : la somme des termes impairs et N : le nombre de termes impairs.

On peut généraliser pour n'importe quelle forme de cycle. On peut obtenir une relation plus simple si on l'on supprime le terme N et si l'on enlève 1 à tous les termes impairs et si l'on appelle leur somme I' . On obtient la seconde forme de notre propriété remarquable :

$$P - I' = 0$$

Pour un problème en $(AX+1)/2$, on peut généraliser la formule :

$$(A-2).P - I = B.N$$

BIBLIOGRAPHIE

- Jean-Paul Delahaye, [La conjecture de Syracuse](#) ;
- Pierre-Louis Giscard :
 - [Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 1](#),
 - [Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 2](#),
 - [Que sait-on compter sur un graphe ? Partie 3](#).
- Shalom Eliahou :
 - [Le problème \$3n+1\$: élémentaire mais redoutable \(I\)](#),
 - [Le problème \$3n+1\$: cycles de longueur 5 \(II\)](#),
 - [Le problème \$3n+1\$: y a-t-il des cycles non triviaux ? \(III\)](#).
- Keenan Monks et al, Strongly sufficient sets and the distribution of arithmetic sequences in the $x + 1$ graph, Discrete Mathematics.

- Monks, Kenneth G. « $3x+1$ Minus the + ». Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5 (2002).
- Gérard Villemin, [Cycle de Syracuse](#).
- Jason Davies. Collatz Graph : All Numbers Lead to One.

QUELQUES LIENS WEB

Différents exemples de graphes : [1](#), [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#).

Remerciements

L'auteur remercie Olivier Rozier (IPGP - Institut de Physique du Globe de Paris) pour ses recherches bibliographiques.