L - CONIQUES

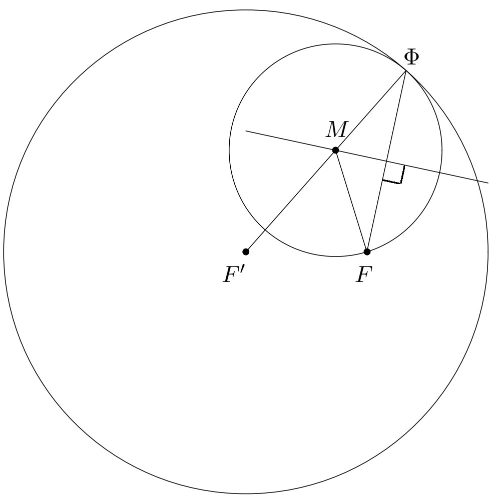
DÉFINITION On appelle **conique** l'ensemble des centres des cercles passant par un point fixe F et tangent à un cercle fixe $(F', 2a)$ $(a > 0)$ ou à une droite fixe Δ ne contenant pas F.
On appellera **foyer** le point fixe, **cercle directeur** le cercle fixe et **directrice** la droite fixe.
– si F et F' sont confondus, l'ensemble est le cercle (F, a),
– si F est à l'intérieur du cercle $(F', 2a)$ on obtient une **ellipse**,
– si F est à l'extérieur du cercle $(F', 2a)$ on obtient une **hyperbole**,
– si c'est une droite fixe, on obtient une **parabole**.

Cas limites :
– si $a = 0$, l'ensemble est une droite, la médiatrice de FF',
– si le cercle directeur passe par F, l'ensemble est la droite FF',
– si la directrice passe par F, l'ensemble est la droite orthogonale à Δ passant par F.

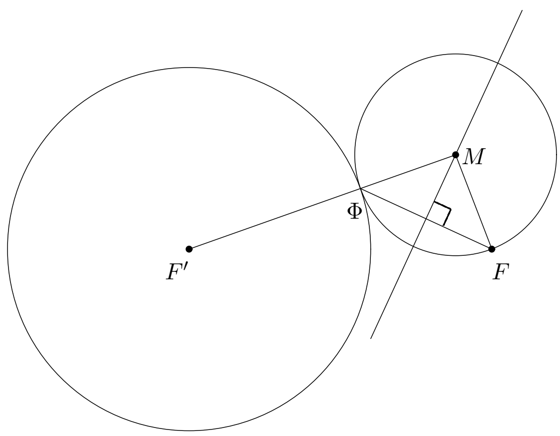
A tout point M de la conique, correspond un point de contact Φ et un seul où le cercle (M, MF) est tangent au cercle $(F', 2a)$ ou à Δ.

Inversement, si l'on se donne un point de contact Φ sur le cercle directeur ou la directrice, on peut construire facilement le point M tel que le cercle (M, MF) soit tangent en Φ au cercle $(F', 2a)$ ou à Δ .

• Dans le cas du cercle directeur, le point M est le point d'intersection de $F'\Phi$ et de la médiatrice de $F\Phi$. Le seul cas où l'on n'obtient pas de point M a lieu lorsque ces droites sont parallèles, ce qui n'est possible que dans le cas de l'hyperbole.

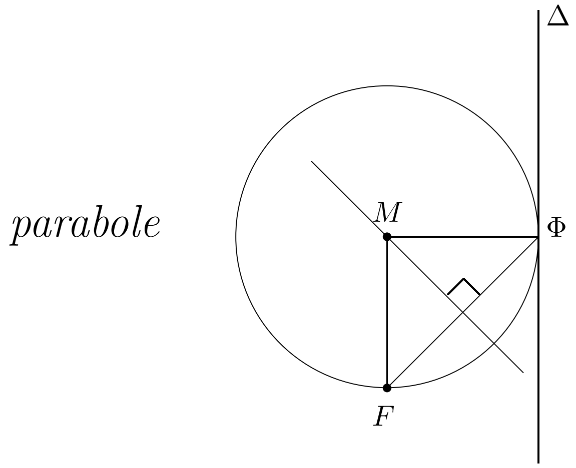


ellipse



hyperbole

• Dans le cas de la directrice, le point M est l'intersection de la médiatrice de $F\Phi$ et de la droite orthogonale à Δ passant par Φ.



Remarque : on peut dire également qu'une parabole est l'ensemble des points équidistants d'un point fixe F et d'une droite fixe Δ.

Coniques à centre

Ce sont les coniques autres que les paraboles. Les foyers sont les points F et F'. Ils jouent des rôles symétriques d'après le théorème suivant.

Théorème L'ensemble des points M dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante et vaut $2a$ est une ellipse de foyer F et de cercle directeur $(F', 2a)$ et réciproquement.
L'ensemble des points M dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes F et F' est constante et vaut $2a$ est une hyperbole de foyer F et de cercle directeur $(F', 2a)$ et réciproquement.

Etudions par exemple le cas de l'ellipse. Soit M tel que

$$MF + MF' = 2a$$

et soit le cercle de centre F' et de rayon $2a$. La droite MF' coupe le cercle en Φ. On a

$$F'\Phi = 2a\,.$$

Donc

$$M\Phi = 2a - MF' = MF$$

et M est le centre du cercle passant par F et tangent à $(F', 2a)$ en Φ. Il en résulte que M est sur l'ellipse de foyer F et de cercle directeur $(F', 2a)$.

Réciproquement, si M est un point de cette ellipse, on a

$$MF = M\Phi$$

et donc

$$MF + MF' = M\Phi + MF' = 2a\,.$$

On a une démonstration analogue dans le cas de l'hyperbole. On peut remarquer que l'hyperbole comporte deux branches :

– les points tels que

$$MF' - MF = 2a$$

qui sont du même côté de la médiatrice de FF' que F,

– les points tels que

$$MF - MF' = 2a$$

qui sont du même côté de la médiatrice de FF' que F'.

Aucun point ne peut se trouver sur la médiatrice.

Symétries - Sommets

DÉFINITION On appelle **sommet** d'une conique, les points situés sur un axe de symétrie de la conique.

Il résulte des définitions des ellipses et hyperboles qu'elles ont deux axes de symétrie : l'axe focal FF' et la médiatrice de FF'. Elles ont donc un centre de symétrie qui est le milieu O de FF'. On posera

$$FF' = 2c$$

la distance focale, et donc

$$OF = OF' = c\,.$$

On constate qu'il existe deux sommets A et A' situés sur l'axe focal. Ils sont à l'extérieur de FF' dans le cas de l'ellipse et compris entre F et F' dans le cas de l'hyperbole.

Dans les deux cas

$$OA = OA' = a\,,$$

puisque l'on doit avoir

$$AF + AF' = A'F + A'F' = 2a$$

dans le cas de l'ellipse et

$$|AF - AF'| = |A'F - A'F'| = 2a$$

dans le cas de l'hyperbole.

On peut alors caractériser les coniques à centre par la valeur du rapport c/a :

– les ellipses correspondent au cas où $c/a < 1$,

– les hyperboles correspondent au cas où $c/a > 1$.
Le cercle, cas particulier de l'ellipse, est obtenu lorsque $c/a = 0$. (Foyers confondus avec le centre du cercle).

Dans le cas de l'ellipse, on trouve deux autres sommets sur l'autre axe de symétrie : ce sont les points B et B' symétriques par rapport à O. Ils vérifient, puisque

$$BF = BF'$$

la relation

$$BF + BF' = 2BF = 2a$$

et donc, grâce au théorème de Pythagore

$$BO^2 = BF^2 - OF^2 = a^2 - c^2\,.$$

On posera donc

$$b = BO = \sqrt{a^2 - c^2}\,.$$

Dans le cas de l'hyperbole, il n'y a pas de sommet sur le second axe de symétrie. On posera cependant

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}\,.$$

Il reste la parabole, qui a comme unique axe de symétrie le droite orthogonale à la directrice et passant par F. Si elle coupe Δ en H, le milieu de FH est le seul sommet.

Définition On appelle **excentricité** d'une conique le rapport

$$e = \frac{c}{a}$$

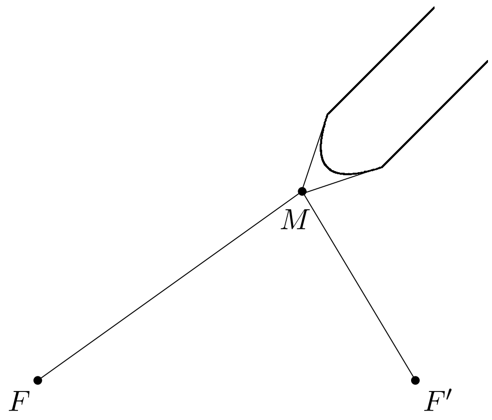
dans le cas d'une conique à centre et le nombre

$$e = 1$$

dans le cas d'une parabole.

Tracé continu

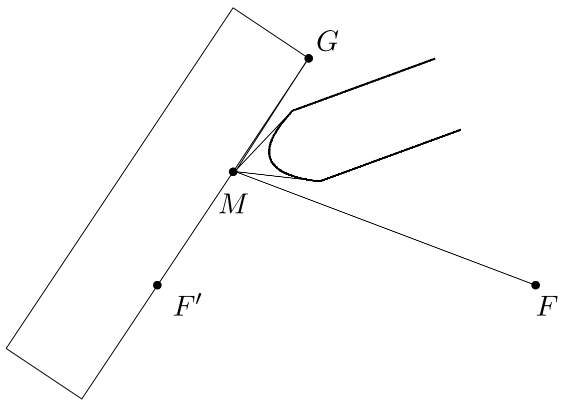
ellipse : on attache à deux points F et F' les extrémités d'un fil. En tendant le fil, le crayon décrira un ellipse de foyers F et F'.



hyperbole : on appuie une règle plate sur un point F' de telle sorte que, si G est une extrémité de la règle, la distance GF' reste constante. On attache un fil en F et G que l'on tend le long de la règle. Lorsque la règle pivote autour de F, le crayon décrit une hyperbole de foyers F et F'. En effet

$$MF - MF' = (GMF) - GF'$$

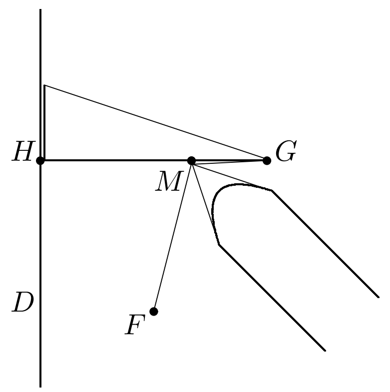
et le membre de droite est une constante.



parabole : on appuie une équerre sur une droite fixe D et l'on tend un fil joignant le point F à l'extrémité G de l'équerre non située sur D. Le fil est tendu le long de l'équerre et, lorsque celle-ci se déplace le long de D, le point décrit une parabole de foyer F. En effet

$$FM - HM = (FMG) - HG$$

et le membre de droite est une constante. Si de plus la longueur du fil est égale à celle de l'équerre, la droite D est la directrice de la parabole.



Construction par points des coniques à centre

Connaissant les foyers F et F' et la longueur $2a$, on peut construire facilement de nombreux points de la conique. Il suffit de prendre deux longueurs r et r' vérifiant

$$r + r' = 2a \quad \text{ou} \quad |r - r'| = 2a$$

et de tracer les cercles (F, r) et (F', r'). Les points d'intersection s'ils existent appartiennent à la conique.

Points à l'infini et asymptotes

Pour l'ellipse, la relation

$$MF + MF' = 2a$$

empêche le point M de s'éloigner à l'infini.

Pour la parabole, pour tout point Φ de la directrice, il existe un point M unique situé sur la médiatrice de $F\Phi$ et la droite Φz orthogonale en Φ à la directrice. Lorsque Φ s'éloigne à l'infini sur Δ, la droite $F\Phi$ tend à devenir parallèle à Δ et la médiatrice de $F\Phi$ tend à devenir parallèle à Φz. Le point M s'éloigne donc à l'infini.

Pour l'hyperbole, si Φ_0 est le point du cercle directeur $(F', 2a)$ tel que $F\Phi_0$ soit tangent à ce cercle, les droites $F'\Phi_0$ et la médiatrice de $F\Phi_0$ sont parallèles et le point M est rejeté à l'infini.

Prenons un point Φ voisin de Φ_0 sur le cercle $(F', 2a)$. Appelons K la projection orthogonale de M sur $F\Phi_0$ et M' celle de M sur Hz médiatrice de $F\Phi_0$. On a donc

$$MM' = KH\,.$$

Soit I la seconde intersection du cercle (M, MF) avec $F\Phi_0$. On a donc

$$MF = M\Phi = MI\,.$$

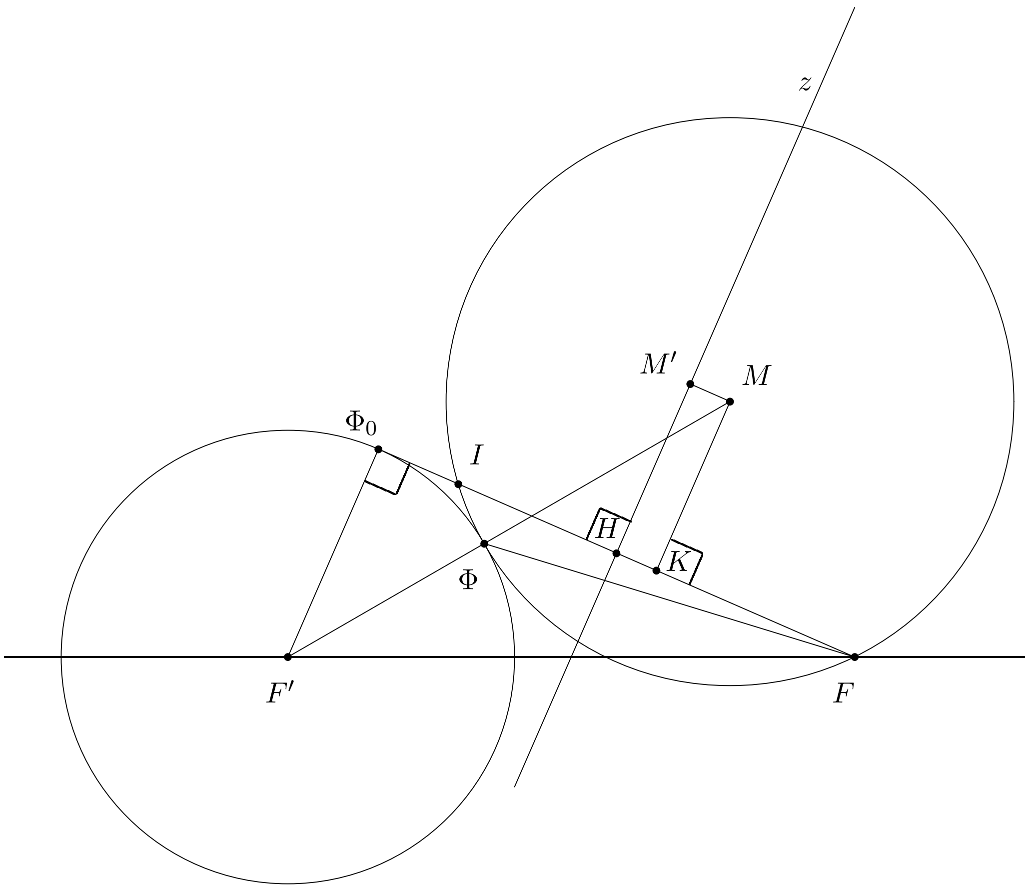
Comme K est le milieu de FI et H celui de $F\Phi_0$, on aura

$$\overline{FH} = \frac{1}{2}\,\overline{F\Phi_0} \quad \text{et} \quad \overline{FK} = \frac{1}{2}\,\overline{FI}$$

d'où l'on déduit

$$\overline{KH} = \frac{1}{2}\,\overline{I\Phi_0}\,.$$

Lorsque Φ tend vers Φ_0, le point I tend aussi vers Φ_0 et donc KH tend vers 0. Il en résulte que MM' tend vers zéro, ce qui signifie que la droite Hz est asymptote à l'hyperbole.



Il y aura une seconde asymptote symétrique de la première par rapport à FF'. L'angle θ que fait l'asymptote avec FF' est égal à $(\widehat{F'F, F'\Phi_0})$. On a donc

$$\cos\theta = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e}\,.$$

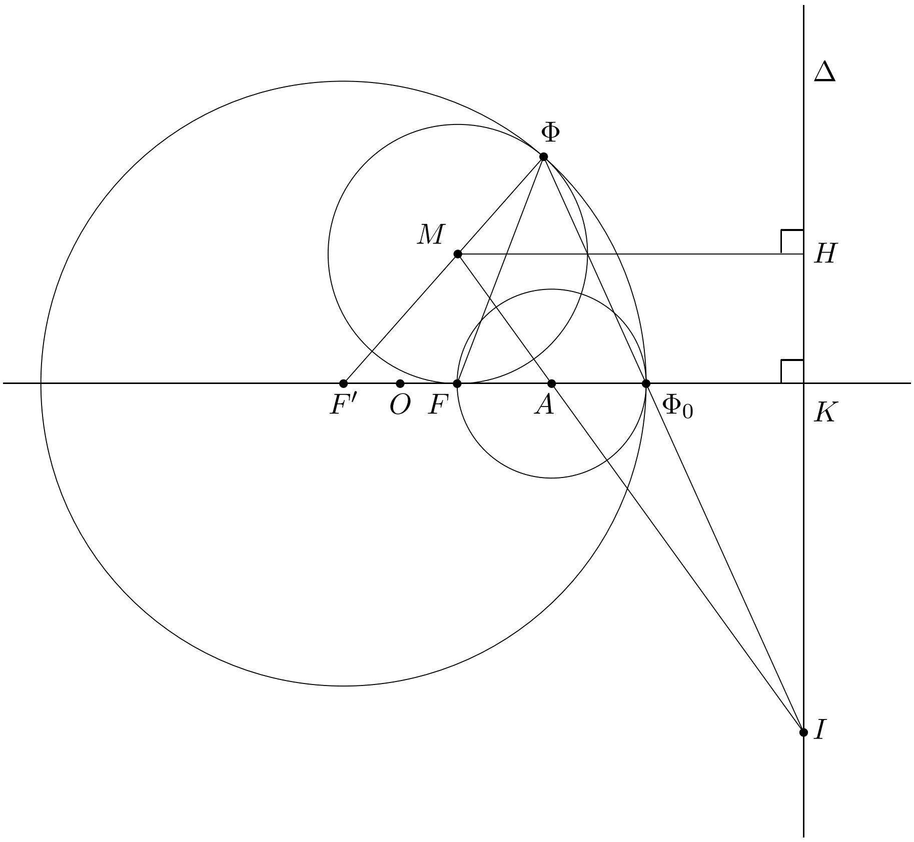
En particulier, lorsque $e = \sqrt{2}$, on obtient $\cos\theta = \pi/4$. Les deux asymptotes sont orthogonales. On dit que l'hyperbole est **équilatère**.

Caractérisation des coniques par foyer, directrice et excentricité

Théorème On se donne un point F, une droite Δ ne contenant pas F et un réel e strictement positif. L'ensemble des points dont le rapport des distances à F et à Δ vaut e est une conique admettant F comme foyer et e comme excentricité.
Réciproquement, pour toute conique de foyer F et d'excentricité e non nulle, il existe une droite Δ unique, telle que la conique soit l'ensemble des points dont le rapport des distances à F et à Δ vaut e.

Le cas de la parabole, correspondant au cas $e = 1$ est déjà traité.

Supposons donnée une conique définie par le foyer F et le cercle directeur $(F', 2a)$.



Soit Φ_0 un point d'intersection de l'axe focal avec le cercle et A le milieu de $F\Phi_0$. On considère alors le cercle de centre A passant par F et tangent au cercle directeur en Φ_0, et le cercle dont le centre est un point M de la conique, passant par F et tangent au cercle directeur en Φ. Les droites $\Phi\Phi_0$ et MA se coupent en I.

Les cercles $(F', 2a)$ et $(A, \Phi_0 A)$ sont homothétiques dans une homothétie de centre Φ_0. De même les cercles $(F', 2a)$ et $(M, \Phi M)$ sont homothétiques dans une homothétie de centre Φ. Il en résulte que les cercles $(A, \Phi_0 A)$ et $(M, \Phi M)$ sont homothétiques. Le centre d'homothétie est situé sur la ligne des centres des deux cercles et sur la ligne des centres des deux premières homothéties, c'est donc I. Il en résulte que I est aussi le pôle d'une inversion transformant $(M, \Phi M)$ en $(A, \Phi_0 A)$. Cette inversion laisse F fixe et transforme Φ en Φ_0, puisque les rayons $M\Phi$ et $A\Phi_0$ ne sont pas parallèles. On aura donc

$$IF^2 = \overline{I\Phi} \cdot \overline{I\Phi_0}\,.$$

Cette relation exprime que le point I a même puissance par rapport au cercle $(F', 2a)$ et au cercle-point F et se trouve donc sur l'axe radical de ces deux cercles, qui est une droite fixe Δ perpendiculaire à FF' en un point K tel que

$$OK = \frac{R^2 - R'^2}{2FF'}$$

où O est le milieu de FF' et R et R' sont les rayons des deux cercles. Donc

$$OK = \frac{4a^2}{4c} = \frac{a^2}{c}\,.$$

Si maintenant on projette le point M sur Δ en H, les triangles IMH et IAK sont semblables et donc

$$\frac{MH}{AK} = \frac{IM}{IA}\,.$$

Ceci est le rapport de l'homothétie de centre I transformant $(A, A\Phi_0)$ en $(M, M\Phi)$. Il est donc égal au rapport des rayons MF/AF. On en déduit

$$\frac{MF}{MH} = \frac{AF}{AK} = \frac{a-c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c}{a} = e\,.$$

Réciproquement, on se donne un point F, une droite Δ et un réel positif e. Appelons K la projection orthogonale de F sur Δ et A le point situé entre A et K tel que

$$\frac{AF}{AK} = e\,.$$

Soit Φ_0 le symétrique de F par rapport à A. On se donne un point M vérifiant la relation

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où H est la projection orthogonale de M sur Δ. La droite MA coupe Δ en I. Des deux relations précédentes, on tire

$$\frac{MF}{AF} = \frac{MH}{AK}$$

et, en utilisant les triangles semblables IAK et IMH, ces rapports sont encore égaux à IM/IA.

Traçons les cercles de centres M et A passant par F. La droite $I\Phi_0$ coupe le cercle de centre M en un point Φ tel que $M\Phi$ ne soit pas parallèle à AK. Alors Φ est l'inverse de Φ_0 dans l'inversion de pôle I qui transforme $(A, A\Phi_0)$ en (M, Φ) et laisse F invariant. En effet, la relation

$$\frac{MF}{AF} = \frac{IM}{IA}$$

montre que les deux cercles sont homothétiques dans une homothétie de centre I, et donc que I est aussi pôle d'inversion. On a la relation

$$IF^2 = \overline{I\Phi} \cdot \overline{I\Phi_0}\,.$$

Si l'on trace un cercle $(F', F'\Phi_0)$ tangent en Φ_0 au cercle (A, AF) et passant par Φ, ce cercle est invariant par l'inversion de pôle I et de puissance IF^2 qui transforme (A, AF) en (M, MF) et donc, par conservation des contacts, il est aussi tangent au cercle (M, MF) en Φ.

Enfin, la relation ci-dessus montre que I appartient à l'axe radical du cercle-point F et du cercle $(F', F'\Phi_0)$. Mais, dans le faisceau défini par l'axe radical Δ et le cercle-point F, il existe un cercle unique passant par Φ_0. Le cercle $(F', F'\Phi_0)$ est donc indépendant de M et le point F' est donc fixe. Il en résulte que M est le centre d'un cercle passant par un point fixe F et tangent à un cercle fixe $(F', F'\Phi_0)$. Le point M est donc sur la conique de foyers F et F' et d'excentricité e.

Remarque : si A et A' sont les sommets de la conique situés sur l'axe focal et si K est le pied de Δ sur cet axe, on a vu que

$$OK = \frac{a^2}{c}$$

et donc

$$OK \cdot OF = OA^2\,,$$

ce qui montre que Δ est la polaire de F par rapport au cercle de diamètre AA', appelé **cercle principal**.

Il y a, pour des raisons de symétrie, une autre directrice Δ' associée à F', symétrique de la première par rapport au centre O.

DÉFINITION On appelle **paramètre** d'une conique la distance p entre un foyer de la conique et un point de la conique situé sur la parallèle à une directrice passant par ce foyer.

– Dans le cas d'une parabole, p est aussi la distance du foyer à la directrice.
– Pour une conique à centre, on a

$$p = MF = e \cdot MH = e \cdot FK = \frac{c}{a}\,|OK - OF| = \frac{c}{a}\left|\frac{a^2}{c} - c\right| = \frac{b^2}{a}\,.$$

– Remarquons que pour un cercle, on a $a = b = R$. La formule précédente donne également $p = R$ et c'est ce que l'on adoptera comme valeur du paramètre dans ce cas.

Cas limites : si l'on étudie l'ensemble des points tels que le rapport des distances à un point fixe F et à une droite fixe Δ contenant F vaut $e > 0$, le problème n'a pas de solution autre que le point F si $e < 1$. Pour $e = 1$, c'est la droite orthogonale à Δ en F (parabole dégénérée). Pour $e > 1$, c'est un couple de droites concourantes en F et symétriques par rapport à Δ, faisant avec la normale à Δ un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{1}{e}\,.$$

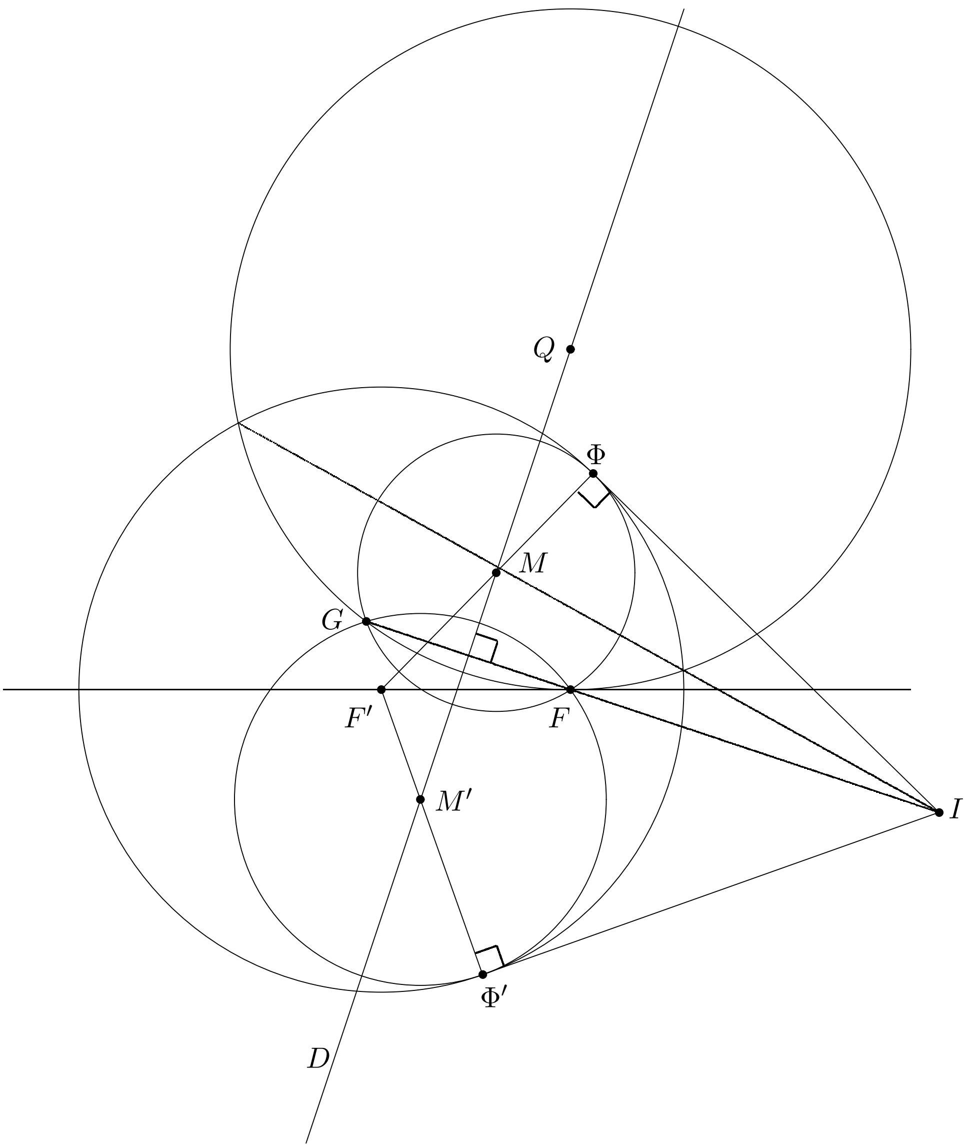
(Hyperbole dégénérée, réduite à ses asymptotes).

Intersection d'une droite D et d'une conique

1) La conique est définie par un foyer F et le cercle directeur $(F', 2a)$.

Si une droite coupe la conique en M, ce point sera le centre d'un cercle passant par F et tangent au cercle directeur. Mais le cercle passera aussi par le symétrique G de F par rapport à la droite D. On est donc ramené à déterminer, parmi les cercles du faisceau à points de base F et G, ceux qui sont tangents au cercle directeur.

On trace un cercle quelconque (de centre Q) du faisceau et l'on détermine l'axe radical de ce cercle et du cercle directeur. Cet axe coupe FG en I, qui sera le centre radical de tous les cercles de la figure. De I, on mène les tangentes au cercle directeur $I\Phi$ et $I\Phi'$, qui donneront les points où les cercles cherchés sont tangents au cercle directeur. On obtient alors M et M' comme points d'intersection de D avec $F'\Phi$ et $F'\Phi'$ respectivement.



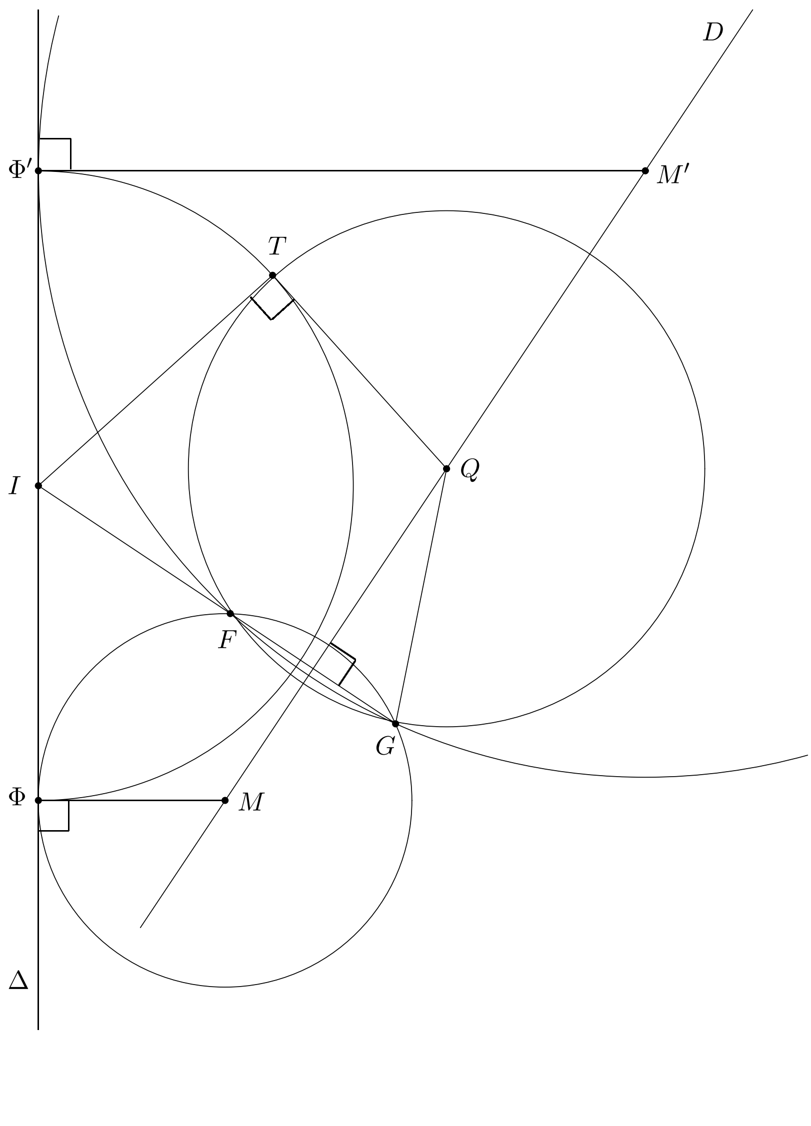
On voit facilement que si F et G ne se trouvent pas dans la même région du plan par rapport au cercle directeur, alors I se trouve à l'intérieur de ce cercle, et l'on ne peut mener de tangentes au cercle issues de I. La droite ne coupe donc pas la conique. Dans le cas où F et G se trouvent dans la même région du plan, le problème a une solution.

Quelques cas particuliers apparaissent cependant :

- sécantes focales : ce sont des droites passant par un des foyers. En dehors de l'axe focal dont les sommets se trouvent facilement, on prendra pour F le foyer appartenant à la droite. On considère alors les cercles du faisceau singulier passant par F et centrés sur D, et le problème se traite comme dans le cas général.

- dans le cas de l'hyperbole, droite D parallèle à une asymptote, lorsque la droite FG est tangente au cercle directeur. Une des droite $F'\Phi$, $F'\Phi'$ est parallèle à D et un des points M et M' est rejeté à l'infini. Il y aura une solution seulement, sauf dans le cas où I est un des points Φ ou Φ', c'est-à-dire quand D est asymptote à la conique.

2) La conique est une parabole donnée par son foyer et sa directrice Δ.



Comme dans 1), si G est le symétrique du foyer par rapport à D, on cherche les cercles du faisceau à points de base F et G tangents à Δ.

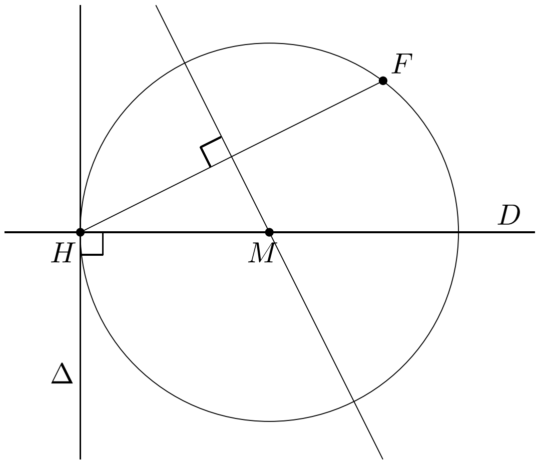
Si I est l'intersection de FG et de Δ, on mène de I une tangente IT à un cercle quelconque (de centre Q) du faisceau et l'on place sur Δ les points Φ et Φ' tels que

$$I\Phi = \Phi' I = IT\,.$$

Les intersections de D et des normales à Δ en Φ et Φ' donnent les points M et M' respectivement.

Le problème n'a pas de solution si F et G ne se trouvent pas dans la même région du plan par rapport à Δ.

Si D est orthogonale à Δ en H, il existe un seul point M qui est l'intersection de D avec la médiatrice de FH.



3) La conique est définie par foyer, directrice et excentricité.

Soit H l'intersection de D et de la normale à Δ passant par F, et K la projection orthogonale de H sur Δ. On trace un cercle centré en H et de rayon $e \cdot HK$.

Si D et Δ ne sont pas parallèles, soit I leur point d'intersection. La droite IF coupe ce cercle en A et B. Alors M est l'homothétique de H dans l'homothétie de centre I qui transforme A en F, et M' est l'image de H dans celle qui transforme B en F. Si P est la projection orthogonale de M sur Δ on a en effet

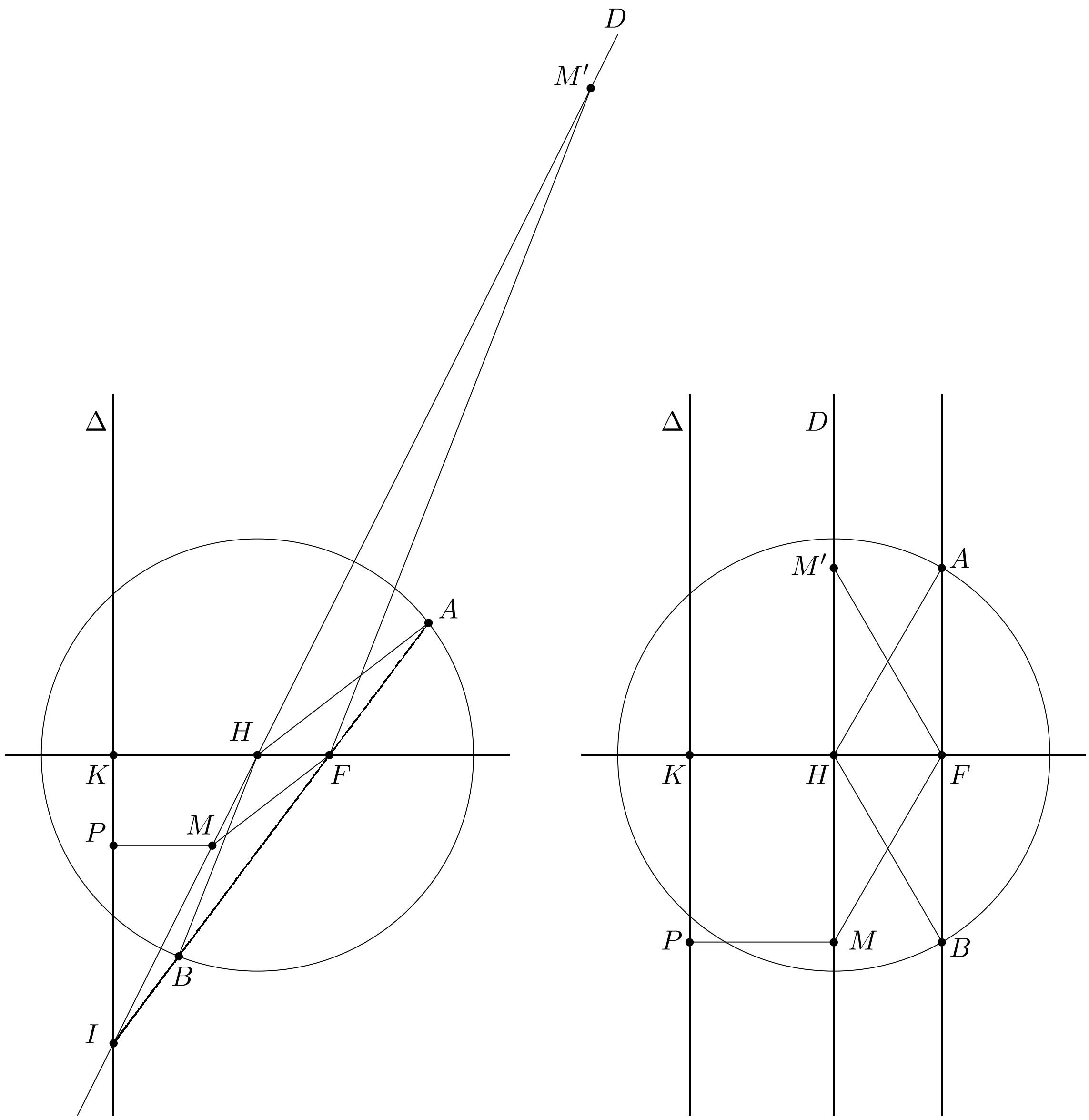
$$\frac{MF}{MP} = \frac{HA}{HK} = e\,.$$

Donc M est l'intersection de D et de la parallèle à AH passant par F. De même M' est l'intersection de D et de la parallèle à BH passant par F.

L 14

Si D et Δ sont parallèles, la parallèle à D passant par F coupe le cercle en deux points A et B. Les parallèles passant par F, à AH et BH respectivement, coupent D en M et M'. En effet, si P est la projection orthogonale de M sur Δ on a de nouveau

$$\frac{MF}{MP} = \frac{HA}{HK} = e\,.$$



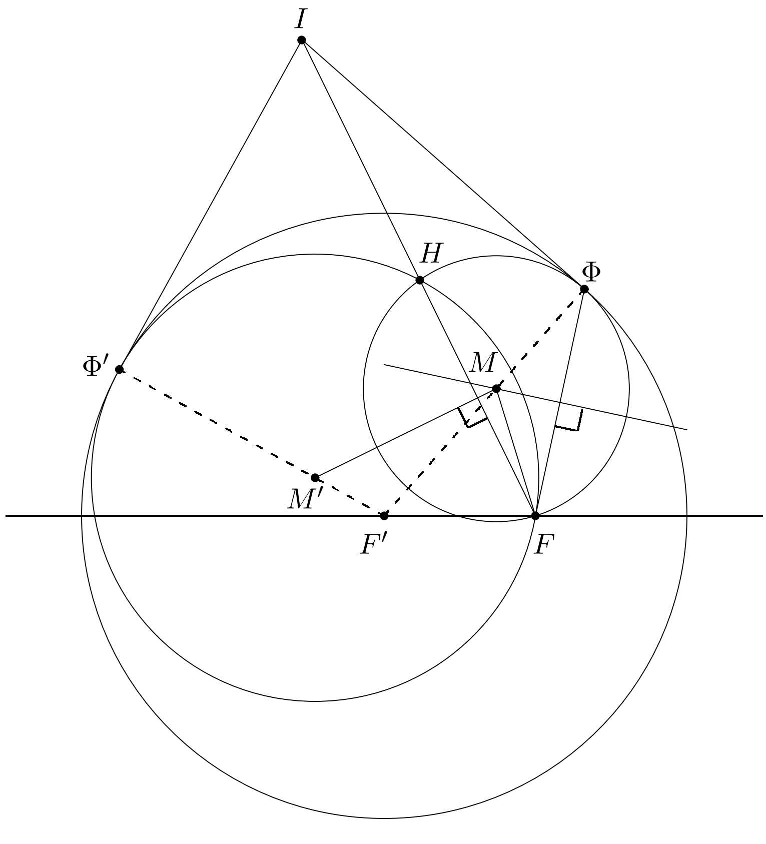
Etude des tangentes aux coniques

I Coniques à centre données par un foyer et le cercle directeur

THÉORÈME Si M est un point de la conique de foyer F et de cercle directeur $(F', 2a)$ et si Φ est le point de contact du cercle (M, MF) et du cercle directeur, la conique admet pour tangente en M le droite médiatrice de $F\Phi$. Cette droite est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$: bissectrice extérieure dans le cas d'une ellipse, intérieure dans le cas d'une hyperbole.

On considère deux points M et M' de la conique, Φ et Φ' les points de contact du cercle directeur et des cercles (M, MF) et $(M', M'F)$ respectivement. Ces cercles se coupent en F et en un point H symétrique de F par rapport à MM'. La corde FH est l'axe radical des deux cercles et porte le point I qui est l'intersection des tangentes aux cercles en Φ et Φ'. Ce sont donc aussi les tangentes au cercle directeur en ces points.

Si M et M' sont deux points de l'ellipse ou de la même branche d'hyperbole, faisons tendre M' vers M. Alors Φ' tend vers Φ et le point I tend aussi vers Φ. La droite FI tend vers la droite $F\Phi$, et le point H tend vers Φ. Il en résulte que la droite MM' tend vers la médiatrice de $F\Phi$. C'est donc la tangente en M à la conique. Comme le triangle $FM\Phi$ est isocèle, la médiatrice est aussi bissectrice.



L 16

Propriétés des tangentes

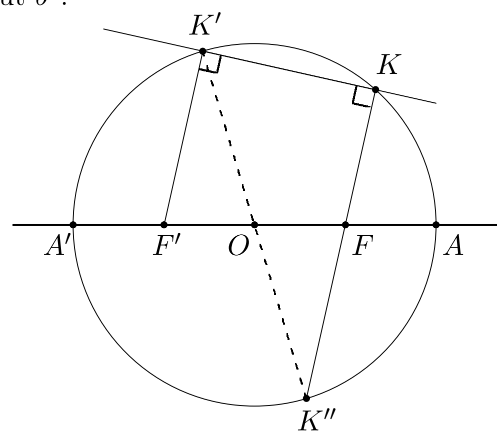
1) Si T et N sont les intersections de la tangente et de la normale en M à une conique avec l'axe focal, alors (FF', TN) est une division harmonique.
2) Le cercle directeur $(F', 2a)$ est l'ensemble des symétriques de F par rapport aux tangentes.
3) Le lieu des projections orthogonales de F sur les tangentes est le cercle principal (O, a).
4) Le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant et vaut b^2.
5) Deux coniques homofocales de nature différente sont orthogonales.

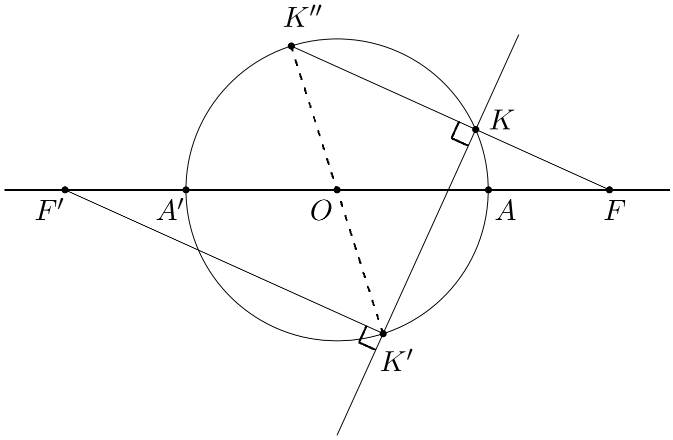
1) Cela résulte du fait que MN et MT sont les bissectrices de l'angle $\widehat{FMF'}$.

2) est évident.

3) Si K est le milieu de $F\Phi$, c'est l'homothétique de Φ dans une homothétie de centre F et de rapport $1/2$. Le point K décrit l'image du cercle directeur $(F', 2a)$ par cette homothétie, c'est-à-dire le cercle (O, a).

4) D'après 3), les projections orthogonales K et K' des foyers F et F' sur une tangente se trouvent sur le cercle principal. Soit K'' la seconde intersection de FK avec le cercle. Le point K'' est symétrique de K' par rapport à O. Donc
$$\overline{FK} \cdot \overline{FK''} = -\overline{FK} \cdot \overline{F'K'}$$
ce qui s'exprime en fonction de la puissance de F par rapport au cercle
$$\overline{FK} \cdot \overline{FK''} = FO^2 - OA^2 = c^2 - a^2\,.$$
Donc
$$\overline{FK} \cdot \overline{F'K'} = a^2 - c^2\,.$$
On trouve b^2 si c'est une ellipse et $-b^2$ si c'est une hyperbole. Dans les deux cas, le produit des distances vaut b^2.





5) Si deux coniques de nature différente ont les mêmes foyers et se coupent en M, les tangentes en M sont bissectrices extérieure et intérieure du même angle. Elles sont donc orthogonales.

Cas particulier des hyperboles : tangentes à l'infini

Si Φ est un point du cercle directeur, la droite $F\Phi$ peut être tangente au cercle directeur en Φ. La droite $F'\Phi$ et la médiatrice de $F\Phi$ sont parallèles, et le point M est rejeté à l'infini. La médiatrice de $F\Phi$ est alors une asymptote et joue le rôle d'une tangente à l'infini. Elle possède encore les propriétés des tangentes.

1) Le point F se projette sur l'asymptote en K milieu de $F\Phi$ qui appartient au cercle principal, et ce cercle est tangent en K à $F\Phi$.

2) Si F' se projette sur l'asymptote en K', on a encore

$$\overline{FK}\cdot\overline{F'K'} = -b^2\,,$$

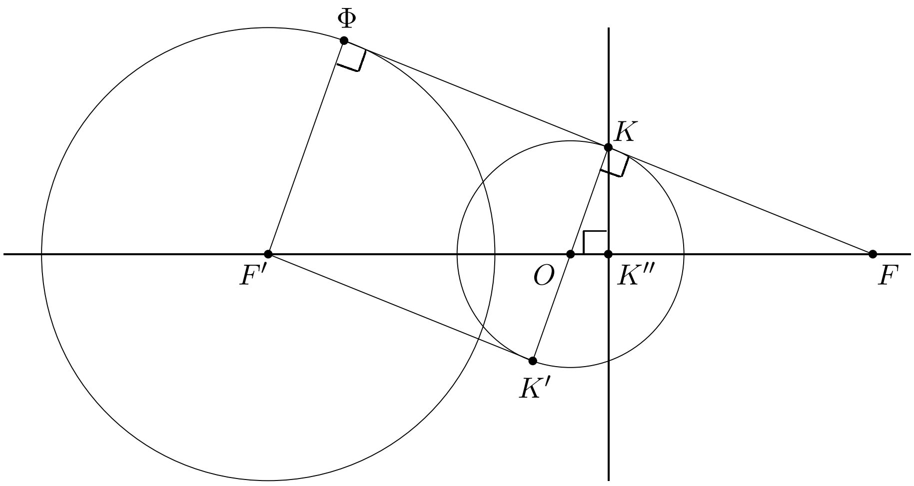
d'où, puisque FK et $F'K'$ sont égaux,

$$FK = F'K' = b\,.$$

Remarque : si K'' est la projection orthogonale de K sur FF', alors KK'' est la hauteur du triangle rectangle OKF et donc

$$OK'' = \frac{OK^2}{OF} = \frac{OF^2 - FK^2}{OF} = \frac{c^2-b^2}{c} = \frac{a^2}{c}\,,$$

ce qui montre que K'' est le pied de la directrice associée à F. Cette directrice passe par K.

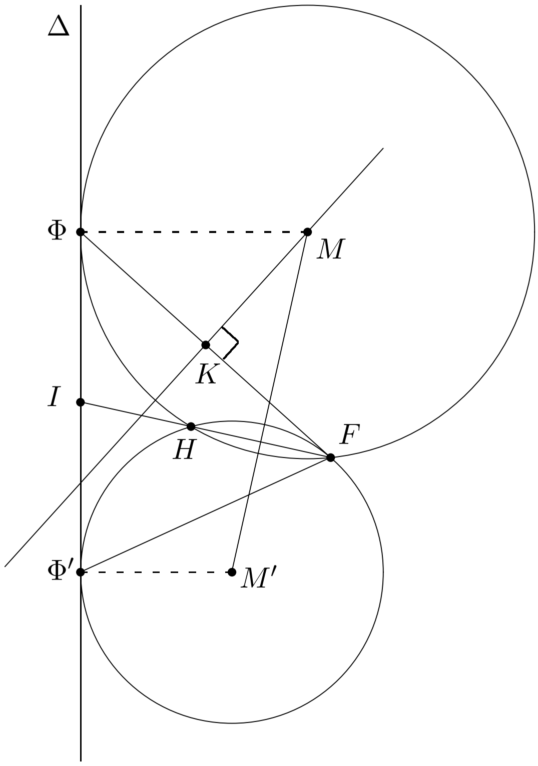


II Parabole

> Théorème Soit une parabole de foyer F et de directrice Δ, M un point de cette parabole, Φ le point de contact de Δ et du cercle (M, MF). La médiatrice de MF est alors la tangente en M à la courbe. Cette tangente est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FM\Phi}$.

La démonstration est analogue à celle faite dans la partie I. Si l'on prend deux points voisins M et M', les cercles (M, FM) et (M', FM') sont tangents à Δ en Φ et Φ' respectivement et se recoupent en H, symétrique de F par rapport à MM'. Le point d'intersection I de FH avec Δ appartient à l'axe radical des deux cercles et se trouve au milieu de $\Phi\Phi'$.

Lorsque M' tend vers M, les points Φ', I et H tendent vers Φ et la droite MM' tend vers la médiatrice de $F\Phi$, qui est aussi la bissectrice de $\widehat{FM\Phi}$ puisque le triangle $FM\Phi$ est isocèle.



Propriétés des tangentes

1) La tangente et la normale en un point M forment avec MF et $M\Phi$ un faisceau harmonique. Ce faisceau est donc coupé harmoniquement par toute droite, en particulier par l'axe focal.
2) La directrice est l'ensemble des symétriques de F par rapport aux tangentes.
3) Le lieu des projections orthogonales de F sur les tangentes est la droite tangente à la parabole au sommet.

1) provient du fait que la tangente et la normale sont les bissectrices de l'angle $\widehat{FM\Phi}$.
2) est évident.
3) La projection orthogonale K de F sur la tangente est l'homothétique de Φ dans une homothétie de centre F et de rapport $1/2$. Le point K décrit l'image de la directrice par cette homothétie qui n'est autre que la tangente à la parabole à son sommet.

III Conique définie par foyer, directrice et excentricité

THÉORÈME Si M est un point de la conique, la perpendiculaire en F à FM coupe la directrice relative à F en T. La droite MT est alors la tangente en M à la conique.

Soit deux points M et M' voisins de la conique. Ils se projettent orthogonalement sur Δ en H et H' respectivement. Soit I l'intersection de MM' et de Δ. On a donc

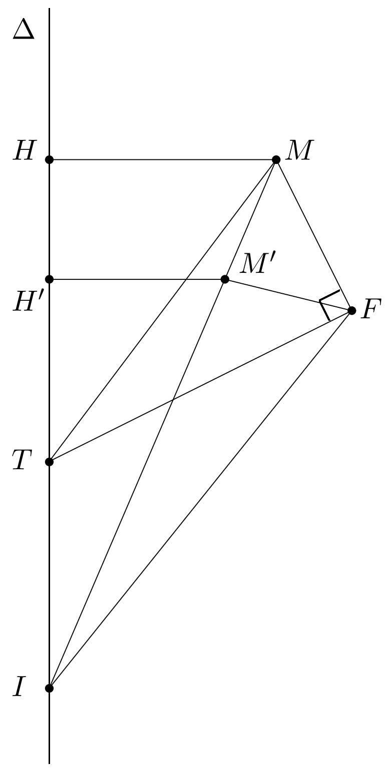
$$e = \frac{MF}{MH} = \frac{M'F}{M'H'} \,.$$

En utilisant le fait que les triangles HMI et $H'M'I$ sont semblables, on obtient

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MH}{M'H'} = \frac{MI}{M'I} \,.$$

On en déduit que dans le triangle FMM', le point I partage le côté MM' dans un rapport égal à celui des côtés adjacents. Donc I est le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{MFM'}$. Si M et M' sont situés sur la même branche de courbe, c'est la bissectrice extérieure.

Lorsque M' tend vers M, cette bissectrice tend vers la normale en F à MF qui coupe Δ en T. Alors I tend vers T et donc la droite MM' tend vers MT qui est la tangente en M à la courbe.



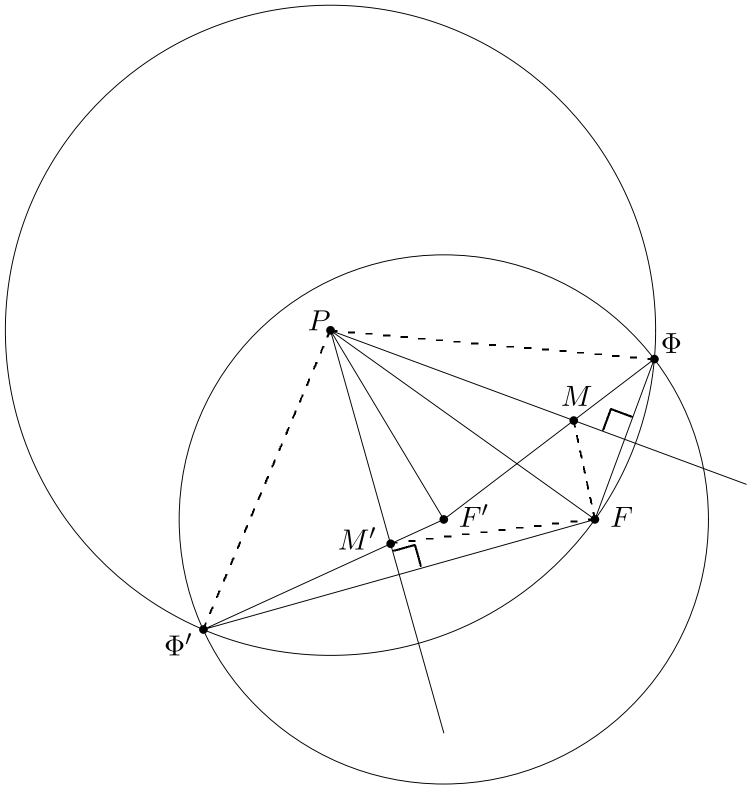
Tangentes issues d'un point donné P

I Conique définie par foyer et cercle directeur

Si PM est une tangente à la courbe, c'est la médiatrice de $F\Phi$ et donc

$$P\Phi = PF\,.$$

Il suffit donc de tracer le cercle (P, PF). S'il recoupe le cercle directeur en Φ et Φ', on obtiendra facilement les points M et M' correspondants : le point M est l'intersection de $F'\Phi$ et de la médiatrice de $F\Phi$.



Pour que la construction soit possible, il faut et il suffit que les cercles se coupent, c'est-à-dire que la distance FF' soit comprise entre la somme et la différence des rayons, soit

$$|PF - 2a| < PF' < PF + 2a\,,$$

ou encore

$$|PF - PF'| < 2a < PF + PF'\,.$$

Dans le cas de l'ellipse, on a

$$|PF - PF'| < FF' = 2c < 2a\,,$$

donc la première condition est vérifiée et il reste seulement

$$2a < PF + PF' \,,$$

qui caractérise les points extérieurs de l'ellipse.

Dans le cas de l'hyperbole, on a

$$2a < 2c = FF' < PF + PF' \,,$$

donc la seconde condition est vérifiée et il reste seulement

$$|PF - PF'| < 2a \,,$$

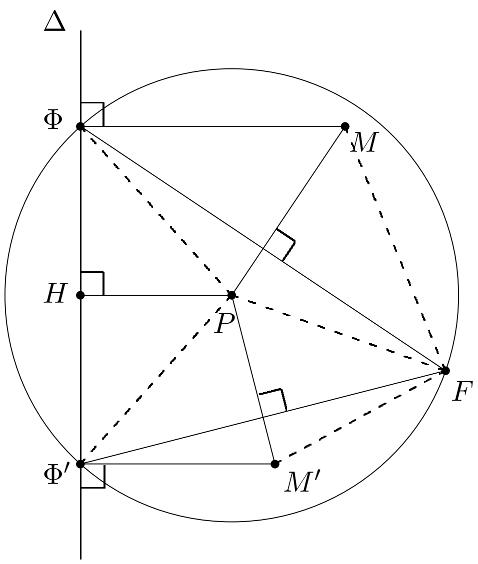
qui caractérise les points extérieurs de l'hyperbole.

II Parabole

Si PM est une tangente à la parabole, c'est la médiatrice de $F\Phi$ et donc

$$P\Phi = PF \,.$$

On trace le cercle de centre P et de rayon PF. S'il coupe la directrice en Φ et Φ', on en déduit facilement les points M et M' correspondants : le point M est l'intersection de la médiatrice de $F\Phi$ et de la perpendiculaire en Φ à la directrice.



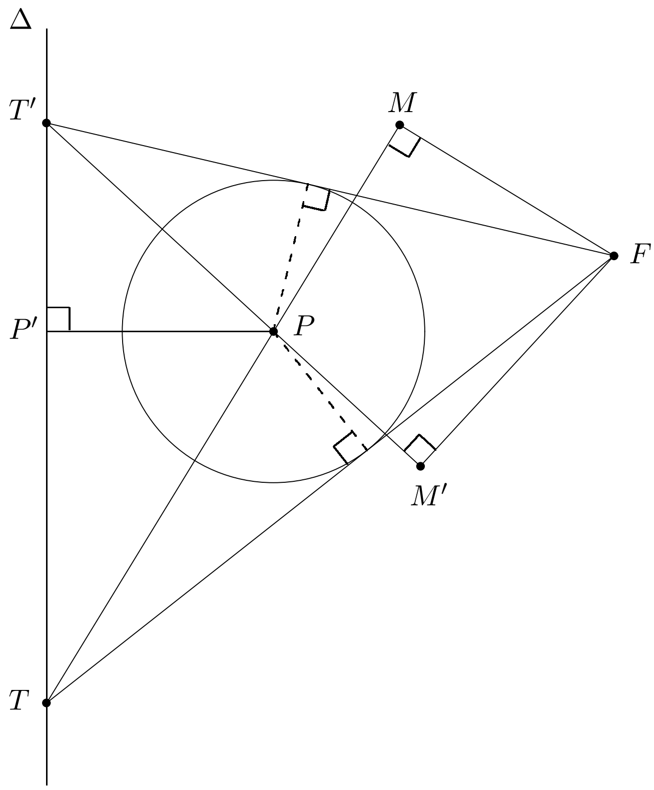
La condition pour que le cercle coupe la droite est que, soit P et F ne se trouvent pas du même côté de la directrice, soit P et F se trouvent du même côté de la directrice et

$$PH < PF \,,$$

ce qui caractérise les points extérieurs de la parabole.

III Conique définie par foyer, directrice et excentricité

Si P se projette orthogonalement sur Δ en P', on trace le cercle de rayon $e \cdot PP'$. On mène de F les tangentes au cercle. Elles coupent Δ en T et T'. Alors PT et PT' sont les tangentes à la conique et M et M' s'en déduisent facilement : M est la projection orthogonale de F sur la droite PT.



Propriétés des tangentes issues de P : théorème de Poncelet

1) La droite joignant le point P à un foyer est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs joignant ce foyer aux points de contact des tangentes à la conique issues de P.

2) Les tangentes issues de P à une conique à centre sont également inclinées par rapport aux rayons vecteurs PF et PF'.

3) Le cosinus de l'angle $\widehat{V}$ formé par les tangentes en P à une conique est donné,
pour une conique à centre, par

$$\cos \widehat{V} = \frac{PF^2 + PF'^2 - 4a^2}{2PF \cdot PF'}$$

et pour une parabole, par

$$\cos \widehat{V} = \frac{PH}{PF}\,.$$

1) Pour une conique à centre, les symétries orthogonales successives par rapport à PM, PF' et PM' transforment l'angle $\widehat{PFM}$ successivement en $\widehat{P\Phi M}$, $\widehat{P\Phi' M'}$ et $\widehat{PFM'}$ (voir figure page 20), d'où l'égalité

$$\widehat{PFM} = \widehat{PFM'}\,.$$

Donc PF est bissectrice de $\widehat{MFM'}$.

Pour une parabole, les symétries orthogonales par rapport à PM, PH et PM' transforment l'angle $\widehat{PFM}$ en $\widehat{P\Phi M}$, $\widehat{P\Phi' M'}$ et enfin en $\widehat{PFM'}$ (voir figure page 21). La conclusion est identique.

2) On considère quatre symétries orthogonales par rapport à PF, PM, PF' et PM'. Le point F se transforme successivement en F, Φ, Φ', F. En regroupant les symétries deux à deux, le produit des quatre symétries est celui des deux rotations $(P, 2(\widehat{PF, PM}))$ et $(P, 2(\widehat{PF', PM'}))$. C'est donc une rotation de centre P et elle laisse F fixe. Il en résulte que c'est l'application identique et donc

$$2(\widehat{PF, PM}) + 2(\widehat{PF', PM'}) = \widehat{0}\,.$$

Il en résulte que les angles de droites $(\widehat{PF, PM})$ et $-(\widehat{PF', PM'})$ sont égaux.

3) Pour une conique à centre, on a d'après 2)

$$\widehat{V} = (\widehat{PM, PM'}) = (\widehat{P\Phi, PF'})$$

et, dans le triangle $P\Phi F'$, en tenant compte du fait que $P\Phi$ et PF sont égaux,

$$F'\Phi^2 = 4a^2 = PF^2 + PF'^2 - 2PF \cdot PF' \cos \widehat{V}\,.$$

On en tire la valeur voulue de $\cos \widehat{V}$.

Pour les paraboles, on a

$$\widehat{V} = (\widehat{PM, PM'}) = \frac{1}{2}(\widehat{P\Phi, P\Phi'}) = (\widehat{P\Phi, PH})$$

et donc

$$\cos \widehat{V} = \frac{PH}{P\Phi} = \frac{PH}{PF}\,.$$

Application : lieu des points P d'où l'on peut mener à une conique des tangentes orthogonales

1) Pour une conique à centre, la nullité de $\cos \widehat{V}$ équivaut à la condition

$$PF^2 + PF'^2 = 4a^2\,.$$

Cela s'écrit

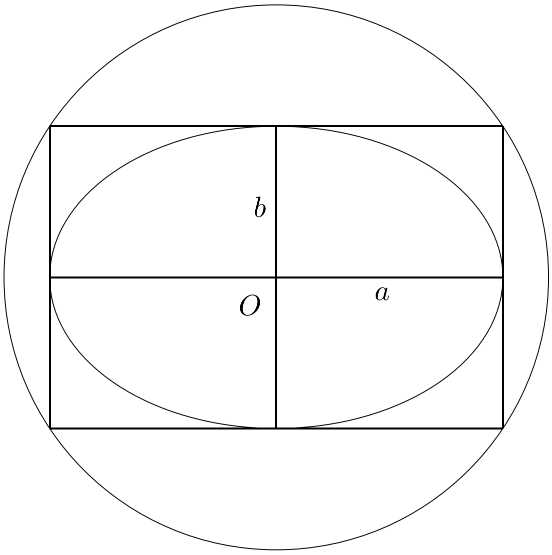
$$(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF'})^2 = 4a^2$$

et, en développant,

$$2PO^2 + 2OF^2 = 4a^2 .$$

Le point P décrit un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2a^2 - c^2}$, appelé **cercle orthoptique**.

Dans le cas de l'ellipse, le rayon vaut encore $\sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe toujours. On obtient un cercle circonscrit au rectangle dont les côtés sont les tangentes aux sommets de l'ellipse.



Dans le cas de l'hyperbole, le cercle n'existe que si

$$\sqrt{2} > \frac{c}{a} = \frac{1}{e} ,$$

c'est-à-dire si les asymptotes forment un angle inférieur à $\pi/4$. Le cas limite est celui de l'hyperbole équilatère pour laquelle le cercle se réduit au point O, point d'intersection des asymptotes.

2) Pour une parabole, la condition est

$$PH = 0 .$$

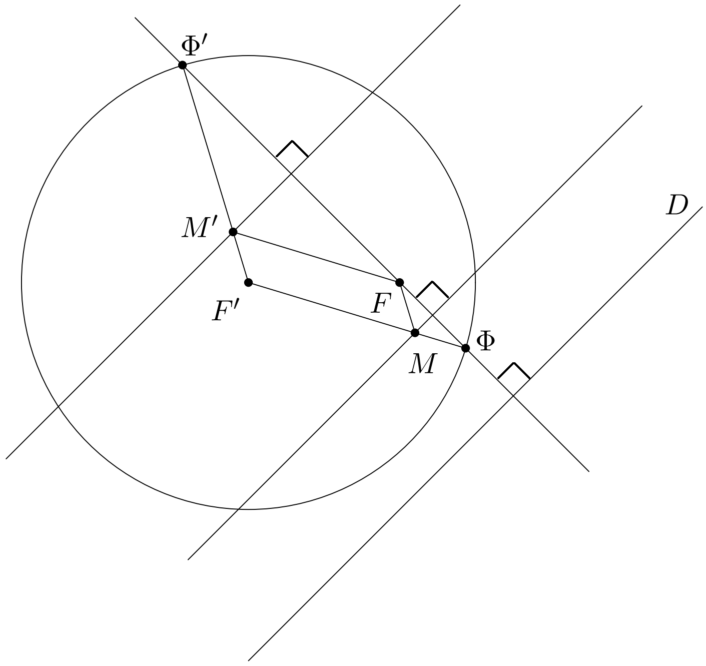
Les points décrivent la directrice qui joue dans ce cas le rôle du cercle orthoptique. On peut remarquer que les angles $\widehat{PFM}$ et $\widehat{PFM'}$, qui sont égaux à $\widehat{P\Phi M}$, sont donc droits et que la droite MM' passe par F.

Tangente parallèle à une direction donnée

I Conique définie par foyer et cercle directeur

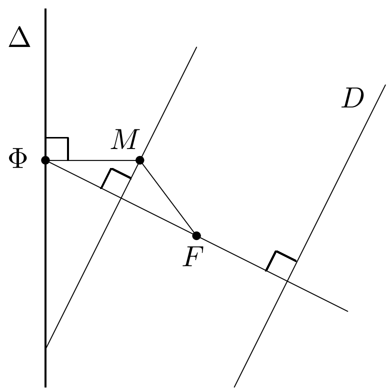
La médiatrice de $F\Phi$ doit être parallèle à la direction D. Cela signifie que $F\Phi$ est orthogonale à D. On mène donc la droite orthogonale à D passant par F. Elle coupe éventuellement le cercle directeur en deux points Φ et Φ' dont on déduit M et M'.

Pour une ellipse, comme F est intérieur au cercle, il y a deux solutions quelle que soit la direction D. Pour une hyperbole, la droite coupera le cercle à condition qu'elle fasse avec l'axe focal un angle inférieur à celui que fait la tangente $F\Phi_0$ au cercle avec cet axe, c'est-à-dire si l'angle que fait D avec l'axe focal est inférieur à l'angle que fait l'asymptote avec cet axe.



II Parabole

Le procédé est le même. La droite orthogonale à D passant par F coupe la directrice en un point Φ unique, sauf si D est parallèle à l'axe focal.

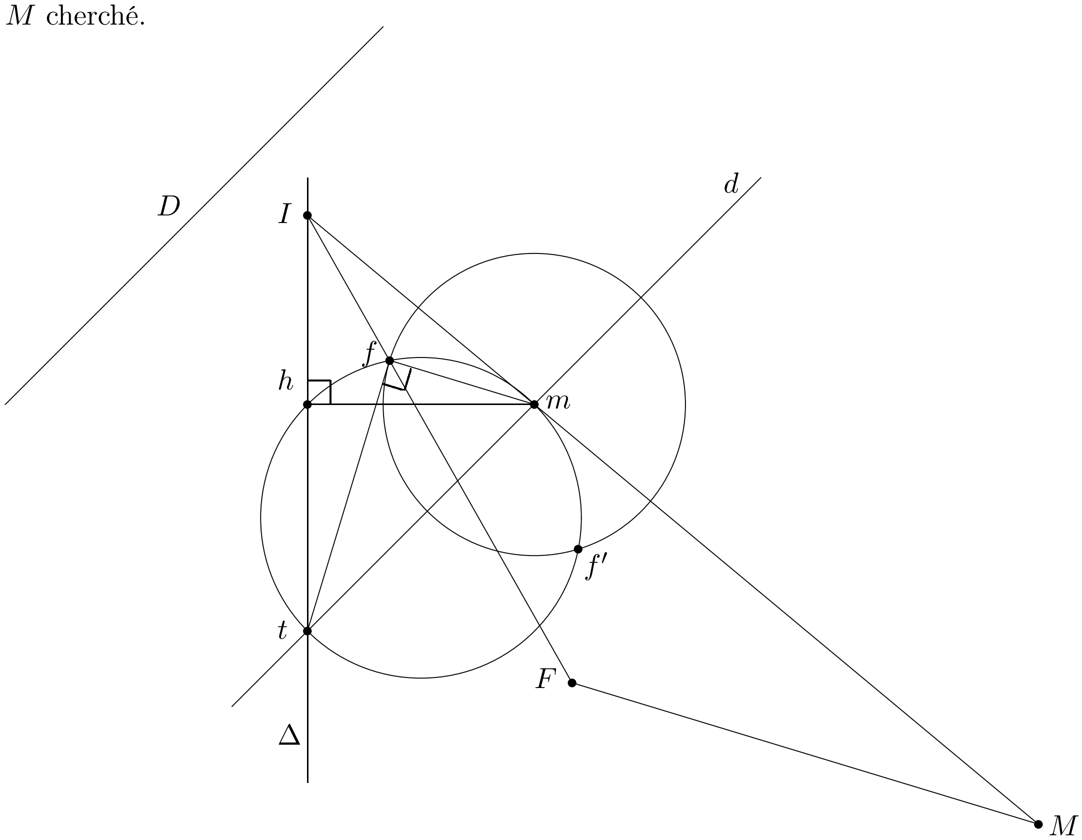


III Conique définie par foyer, directrice et excentricité

On se donne une droite d parallèle à D et un point m de cette droite, et l'on cherche le foyer f d'une conique de directrice Δ, d'excentricité e, tangente à d en m. Le point f se trouve sur le cercle de centre

m et de rayon $e \cdot mh$, où h est la projection orthogonale de m sur Δ, ainsi que sur le cercle de diamètre mt, où t est l'intersection de d et Δ, puisque l'angle $\widehat{tfm}$ est droit. Si le problème est possible, il peut y avoir deux points f.

Si I est l'intersection de fF et de Δ, l'homothétie de centre I qui transforme f en F transformera m en un point M cherché.



Génération tangentielle des coniques

L'étude des tangentes permet de définir une conique comme enveloppe de familles de droites :

1) l'enveloppe de la médiatrice de $F\Phi$, où F est un point fixe et Φ décrit un cercle ou une droite fixe ;
2) l'enveloppe du deuxième côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle fixe et le premier passe par un point fixe ;
3) l'enveloppe des droites dont le produit des distances à deux points fixes est constant.

Propriété des sous-normales

> THÉORÈME Si la normale en M à une conique coupe l'axe focal en N, la projection orthogonale du segment MN sur les rayons vecteurs MF et MF' est constante et est égale au paramètre de la conique.

Si l'on se donne par exemple la conique par foyer, directrice et excentricité, appelons H et K les projections orthogonales de M et N sur Δ, et T l'intersection de la tangente en M avec Δ.

Les angles $\widehat{MTF}$ et $\widehat{FMN}$ sont égaux car ils ont le même complémentaire $\widehat{TMF}$. Le quadrilatère $HMFT$, qui a deux angles opposés qui sont des angles droits, est inscriptible et donc les angles $\widehat{MHF}$ et $\widehat{MTF}$ sont égaux. Il en résulte l'égalité de $\widehat{MHF}$ et de $\widehat{FMN}$. Enfin, les angles $\widehat{MFN}$ et $\widehat{HMF}$ sont égaux comme angles alterne-interne. Les triangles MHF et FMN sont donc semblables. Alors

$$\frac{MN}{HF} = \frac{MF}{MH} = e\,.$$

La projection orthogonale MN' de MN sur MF vaut donc

$$MN' = MN\,\cos\widehat{FMN} = e\cdot HF\,\cos\widehat{FMN} = e\cdot KF\,.$$

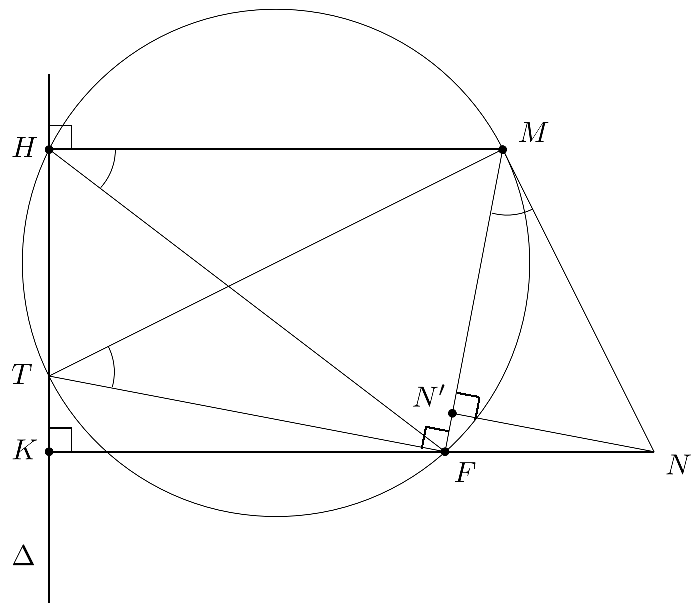
Pour une conique de centre O, on trouve

$$MN' = e\,|OK - OF| = e\,\left|c - \frac{a^2}{c}\right| = \frac{b^2}{a}$$

et pour une parabole

$$MN' = KF\,.$$

Dans les deux cas c'est le paramètre de la conique.



Equations des coniques

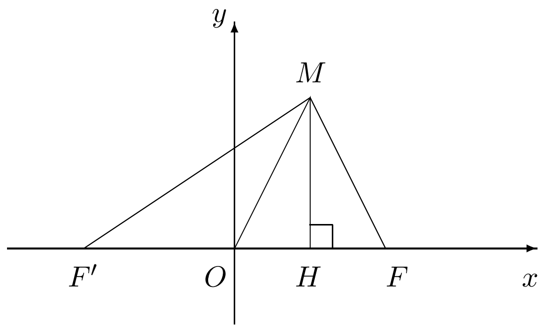
Equations des coniques à centre dans un repère lié aux axes de la conique

L'axe focal sera l'axe des x, le centre de la conique l'origine et l'axe des y sera le second axe de symétrie. Soit F le foyer d'abscisse c et F' celui d'abscisse $-c$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y), on a

$$MF'^2 - MF^2 = (\overrightarrow{MF'} + \overrightarrow{MF})(\overrightarrow{MF'} - \overrightarrow{MF}) = 2\,\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{F'F}\,,$$

d'où, si H est la projection orthogonale de M sur Ox,

$$MF'^2 - MF^2 = 2\,\overline{OH} \cdot \overline{F'F} = 4cx\,.$$



I Ellipse

On a les deux relations

$$MF'^2 - MF^2 = 4cx \quad \text{et} \quad MF' + MF = 2a\,,$$

d'où l'on déduit, en divisant membre à membre ces relations,

$$MF' - MF = 2\,\frac{c}{a}\,x\,,$$

et donc,

$$MF' = a + \frac{c}{a}\,x \quad , \quad MF = a - \frac{c}{a}\,x\,.$$

En utilisant le théorème de Pythagore

$$MF'^2 = MH^2 + HF'^2 = MH^2 + (\overline{OF'} - \overline{OH})^2\,,$$

on tire,

$$\left(a + \frac{c}{a}\,x\right)^2 = y^2 + (x + c)^2\,,$$

et en développant,

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2\,,$$

d'où,

$$x^2\,\frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2\,,$$

et finalement,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Réciproquement, soit M un point dont les coordonnées vérifient la relation précédente. On en tire

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

ce qui prouve que $|x|$ est inférieur à a.

Soit F et F' les points de Ox d'abscisses c et $-c$ où

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

On calcule MF^2 et MF'^2. On a

$$MF^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + b^2 + c^2\,,$$

d'où l'on tire,

$$MF^2 = x^2 \frac{c^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}\,x - a\right)^2\,.$$

De même,

$$MF'^2 = \left(\frac{c}{a}\,x + a\right)^2\,.$$

Mais, comme a est supérieur à $|x|$ et à c, on en déduit,

$$c\,|x| < a^2\,,$$

soit,

$$\frac{c|x|}{a} < a\,.$$

Il en résulte que $a + \dfrac{c}{a}\,x$ et $a - \dfrac{c}{a}\,x$ sont positifs, et donc que

$$MF' = a + \frac{c}{a}\,x \quad \text{et} \quad MF = a - \frac{c}{a}\,x\,,$$

ce qui prouve que

$$MF + MF' = 2a\,.$$

Donc M se trouve sur l'ellipse de foyers F et F', dont les demi-axes sont a et b.

Remarque : si a et b sont égaux, on retrouve l'équation du cercle de centre O et de rayon a

$$x^2 + y^2 = a^2\,.$$

II Hyperbole

On a les deux relations

$$MF'^2 - MF^2 = 4cx \quad \text{et} \quad MF' - MF = 2a\varepsilon\,,$$

où ε est le signe de $MF' - MF$. On en déduit, en divisant ces relations membre à membre,

$$MF' + MF = 2\,\frac{c}{a}\,x\varepsilon\,,$$

et donc

$$MF' = \varepsilon\left(\frac{c}{a}\,x + a\right) \quad , \quad MF = \varepsilon\left(\frac{c}{a}\,x - a\right)\,.$$

Alors, en remplaçant dans la relation

$$MF'^2 = MH^2 + HF'^2\,,$$

on tire, d'une manière analogue au cas de l'ellipse,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Réciproquement, soit M un point dont les coordonnées vérifient la relation précédente. On en tire

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\,,$$

ce qui prouve que a est inférieur à $|x|$.

Soit F et F' les points de Ox d'abscisses c et $-c$ où

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

On calcule MF^2 et MF'^2. On a

$$MF^2 = \left(\frac{c}{a}\,x - a\right)^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = \left(\frac{c}{a}\,x + a\right)^2\,.$$

Mais, comme a est inférieur à $|x|$ et à c, on en déduit,

$$c\,|x| > a^2\,,$$

et le produit

$$\left(\frac{c}{a}\,x - a\right)\left(\frac{c}{a}\,x + a\right) = \frac{c^2}{a^2}\,x^2 - a^2$$

est positif. Donc $\dfrac{c}{a}\,x - a$ et $\dfrac{c}{a}\,x + a$ ont le même signe ε. Alors

$$MF' = \varepsilon\left(\frac{c}{a}\,x + a\right) \quad \text{et} \quad MF = \varepsilon\left(\frac{c}{a}\,x - a\right)\,,$$

ce qui prouve que

$$MF' - MF = 2a\varepsilon \,,$$

soit

$$|MF' - MH| = 2a \,.$$

Donc M se trouve sur l'hyperbole de foyers F et F'.

Remarque : pour une hyperbole équilatère, l'angle θ que fait l'asymptote avec Ox vaut $\pi/4$ et $\cos\theta$ est égal à a/c. On en déduit que

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 1$$

et donc que a et b sont égaux. L'équation est donc

$$x^2 - y^2 = a^2 \,.$$

III Parabole de sommet O et d'axe Ox

L'axe des y est donc tangent au sommet de la parabole. Si p désigne le paramètre de la parabole, soit F le foyer d'abscisse $p/2$. La directrice est alors la droite d'équation

$$x = -\frac{p}{2} \,.$$

Si le point M de coordonnées (x, y) se projette orthogonalement en Φ sur la directrice, on a

$$MF^2 = M\Phi^2 = (\overline{O\Phi} - \overline{OM})^2 \,.$$

On a donc

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \,,$$

ce qui équivaut à

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Réciproquement, si M est un point dont les coordonnées vérifient cette relation, soit F le point de Ox d'abscisse $p/2$ et Δ la droite d'équation

$$x = -\frac{p}{2} \,.$$

Comme px est positif, M et F sont toujours du même côté de Oy et, en remontant les calculs précédents, la relation équivaut à

$$MF = d(M, \Delta) \,,$$

ce qui prouve que M est sur la parabole de foyer F et de directrice Δ.

Equation d'une conique dans un repère quelconque

Théorème   Pour toute conique $\mathscr{C}$ et tout repère $\mathscr{R} = (I, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, il existe un polynôme P de degré 2 de deux variables tel que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ vérifient l'équation

$$P(x, y) = 0\,.$$

Réciproquement, pour tout repère $\mathscr{R}$ et tout polynôme P de degré 2 de deux variables, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ vérifient l'équation

$$P(x, y) = 0$$

est une conique (éventuellement dégénérée) ou est vide.

• Soit Q la forme quadratique non nulle associée à une forme bilinéaire B. Soit L une forme linéaire et F une constante. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur fixe, et soit H' l'application du plan vectoriel dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H'(\overrightarrow{u}) = H(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\,.$$

On a donc,

$$H'(\overrightarrow{u}) = Q(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + L(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + F\,,$$

et, en développant,

$$H'(\overrightarrow{u}) = Q(\overrightarrow{u}) + (L(\overrightarrow{u}) - 2B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})) + (Q(\overrightarrow{v}) - L(\overrightarrow{v}) + F)\,.$$

On peut donc écrire

$$H' = Q + L' + F'\,,$$

où L' est la forme linéaire définie par

$$L'(\overrightarrow{u}) = L(\overrightarrow{u}) - 2B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

et F' la constante

$$F' = Q(\overrightarrow{v}) - L(\overrightarrow{v}) + F\,.$$

• Soit maintenant deux repères $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ et $\mathscr{R}' = (O', \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$, et soit P un polynôme de degré 2 de deux variables. Un point M a pour coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ et (x', y') dans $\mathscr{R}'$. Exprimons $P(x, y)$ en fonction de (x', y'). Il existe une forme quadratique non nulle Q, une forme linéaire L et une constante F telles que

$$P(x, y) = Q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + F = H(\overrightarrow{OM})\,.$$

Si l'on pose

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{O'M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O'O}\,,$$

on obtient, avec les notations ci-dessus,

$$P(x, y) = H(\overrightarrow{O'M} - \overrightarrow{O'O}) = H'(\overrightarrow{O'M})\,,$$

et donc,

$$P(x,y) = Q(\overrightarrow{O'M}) + L'(\overrightarrow{O'M}) + F'\,.$$

Enfin, si l'on pose

$$P'(x',y') = H'(x'\overrightarrow{U'} + y'\overrightarrow{V'})\,,$$

on obtient un polynôme de deux variables et de degré 2 tel que

$$P(x,y) = P'(x',y')\,.$$

Il en résulte que si E est l'ensemble des points M dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ vérifient

$$P(x,y) = 0$$

c'est aussi l'ensemble des points dont les coordonnées dans $\mathscr{R}'$ vérifient

$$P'(x',y') = 0\,.$$

Alors la première partie du théorème provient de ce résultat. En effet, si l'on pose,
pour une ellipse

$$P(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

pour une hyperbole

$$P(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

et pour une parabole

$$P(x,y) = y^2 - 2px$$

l'équation de toute conique est, dans un repère convenable,

$$P(x,y) = 0$$

où P est un polynôme de degré 2 de deux variables. L'équation d'une conique sera donc du même type dans n'importe quel autre repère.

• Réciproquement, soit $\mathscr{C}'$ l'ensemble des points du plan dont l'équation dans un repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est

$$P(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

La forme quadratique Q qui apparaît dans P peut se réduire dans une base orthonormée $(\overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$. Donc dans le repère $(O, \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$ l'ensemble a pour équation

$$Mx^2 + Ny^2 + Sx + Ty + Z = 0\,,$$

et, en permutant éventuellement $\overrightarrow{U'}$ et $\overrightarrow{V'}$, on peut choisir la base pour que N soit non nulle. Enfin, en multipliant éventuellement l'équation par -1, on peut faire en sorte que N soit strictement positif.

On discute suivant la signature de la forme quadratique.

1. Si la signature est $(2,0)$, c'est-à-dire si M et N sont strictement positifs, un changement d'origine fera disparaître les termes en x et y, et dans $(O', \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$, l'équation de $\mathscr{C}'$ sera
$$Mx^2 + Ny^2 = Z' .$$
   a) Si Z' est strictement positif, on écrit
$$\frac{M}{Z'}\,x^2 + \frac{N}{Z'}\,y^2 = 1 ,$$
   et donc $\mathscr{C}'$ est une ellipse.
   b) Si Z' est strictement négatif, l'équation n'a pas de solution et $\mathscr{C}'$ est vide.
   c) Si Z' est nul, $\mathscr{C}'$ est réduite au point O' (ellipse réduite à un point).
2. Si la signature est $(1,1)$, c'est-à-dire si M est strictement négatif, un changement d'origine ramène encore à
$$Mx^2 + Ny^2 = Z' .$$
   a) Si Z' est non nul, on écrit de nouveau
$$\frac{M}{Z'}\,x^2 + \frac{N}{Z'}\,y^2 = 1 ,$$
   et un des deux coefficients est négatif. La courbe $\mathscr{C}'$ est une hyperbole d'axe focal Ox si Z' est négatif et d'axe focal Oy si Z' est positif.
   b) Si Z' est nul, l'équation peut s'écrire
$$(\sqrt{-M}\,x - \sqrt{N}\,y)(\sqrt{-M}\,x + \sqrt{N}\,y) = 0 ,$$
   et $\mathscr{C}'$ est constituée de deux droites d'équations
$$y = \sqrt{\frac{-M}{N}}\,x \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{-M}{N}}\,x .$$
   On obtient une hyperbole dégénérée, réduite à ses asymptotes.
3. Si la signature est $(1,0)$, l'équation dans $(O', \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$ est alors
$$Ny^2 + Sx + Ty + Z = 0 .$$
   Un changement d'origine fait disparaître le terme en y.
   a) Si S est non nul, le changement d'origine fait aussi disparaître le terme constant et dans ce nouveau repère l'équation devient
$$Ny^2 + S'x = 0 ,$$
   soit
$$y^2 = -\frac{S'}{N}\,x ,$$
   qui est l'équation d'une parabole.

b) Si S est nul, l'équation s'écrit dans le nouveau repère,

$$Ny^2 + Z = 0\,.$$

Si Z est strictement négatif, on trouve deux droites d'équations

$$y = \sqrt{\frac{-Z}{N}} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{-Z}{N}}\,.$$

Sinon, on obtient l'ensemble vide.

Ce qui précède permet de déterminer facilement la nature d'une conique d'après son équation dans un repère quelconque.

Théorème Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation

$$P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

1. Si $B^2 - AC < 0$ la courbe est une ellipse (éventuellement vide ou réduite à un point)
2. Si $B^2 - AC = 0$ la courbe est une parabole (éventuellement vide ou réduite à deux droites parallèles)
3. Si $B^2 - AC > 0$ la courbe est une hyperbole (éventuellement réduite à deux droites concourantes). Dans ce dernier cas la forme quadratique

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

se factorise sous la forme

$$Q(x, y) = (\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y)$$

et les droites vectorielles associées aux asymptotes ont pour équation

$$\alpha x + \beta y = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' x + \beta' y = 0\,.$$

En pratique, si C est non nul, et si t_1 et t_2 sont les racines du trinôme $Ct^2 + 2Bt + A$, les coefficients directeurs des asymptotes sont t_1 et t_2. Si C est nul, une des asymptotes est parallèle à Oy et l'autre a pour coefficient directeur la racine de $2Bt + A = 0$.

La signature de la forme quadratique dépend uniquement du signe de $B^2 - AC$. Si ce signe est strictement négatif, la signature vaut $(2, 0)$ ou $(0, 2)$. Si le signe est strictement positif, la signature est $(1, 1)$, si $B^2 - AC$ est nul, la signature est $(1, 0)$ ou $(0, 1)$. Le théorème résulte alors de ce qui précède, et il reste à étudier le cas des asymptotes de l'hyperbole.

Si C est non nul, on écrit

$$0 = \frac{P(x, y)}{x^2} = A + 2B\,\frac{y}{x} + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{D}{x} + \frac{E}{x}\,\frac{y}{x} + \frac{F}{x^2}\,.$$

Lorsqu'un point de coordonnées (x, y) tend vers l'infini le long d'une asymptote, le rapport y/x tend vers le coefficient directeur t de cette asymptote et, par passage à la limite dans l'équation précédente, on trouve

$$Ct^2 + 2Bt + A = 0\,.$$

Si C est nul, on inverse les rôles de x et de y. Le rapport x/y tend vers s racine de

$$As^2 + 2Bs = 0$$

où s est l'inverse du coefficient directeur de l'asymptote. Une de ces racines est nulle, donc l'asymptote est parallèle à Oy, l'autre vaut

$$s = \frac{1}{t} = -2\,\frac{B}{A}$$

et est racine de

$$2Bt + A = 0\,.$$

Equation d'une hyperbole dans un repère déterminé par ses asymptotes

Théorème   Soit une hyperbole de centre O et d'asymptotes dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{U'}$ et $\overrightarrow{V'}$. Dans le repère $(O, \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$, l'hyperbole a une équation de la forme

$$y = \frac{K}{x}\,.$$

Inversement toute courbe d'équation

$$y = \frac{K}{x}\,,$$

dans un repère $(O, \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$ est une hyperbole de centre O dont les axes sont les asymptotes.

Soit l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans un repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$. Dans ce repère, les asymptotes sont les droites d'équation

$$y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a}\,x\,.$$

Soit le repère $(O, \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$, où

$$\overrightarrow{U'} = \lambda(a\overrightarrow{U} + b\overrightarrow{V}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V'} = \mu(a\overrightarrow{U} - b\overrightarrow{V})\,.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U'}$ et $\overrightarrow{V'}$ dirigent les asymptotes. Si M a pour coordonnées (x', y') dans ce repère, on a

$$x = a(\lambda x' + \mu y') \quad \text{et} \quad y = b(\lambda x' - \mu y')$$

et, en reportant dans l'équation, on obtient

$$4\lambda\mu x'y' = 1\,,$$

soit

$$y' = \frac{1}{4\lambda\mu x'}\,.$$

Inversement, toute courbe d'équation

$$y = \frac{K}{x}\,,$$

c'est-à-dire d'équation

$$2xy - 2K = 0\,,$$

est une hyperbole, d'après le théorème précédent, puisque l'on a $A = C = 0$ et $B = 1$, donc

$$B^2 - AC > 0\,.$$

Remarques

1) Si le repère initial est orthonormé et si les nombres a et b sont égaux, on obtient une hyperbole équilatère. Les asymptotes sont alors orthogonales. Inversement, une courbe d'équation

$$y = \frac{K}{x}$$

dans un repère orthonormé du plan est une hyperbole équilatère.

2) Soit une ellipse d'équation,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

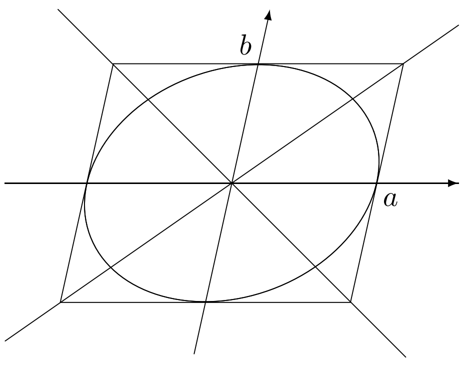
dans un repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ et $(O, \overrightarrow{U'}, \overrightarrow{V'})$, le repère défini par

$$\overrightarrow{U'} = \lambda(a\overrightarrow{U} + b\overrightarrow{V}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V'} = \lambda(a\overrightarrow{U} - b\overrightarrow{V})\,.$$

on trouve comme équation dans le nouveau repère

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2\lambda^2}\,.$$

Le repère est ici formé par les diagonales du parallélogramme de côtés parallèles aux axes, circonscrit à l'ellipse.



Transformation d'une conique par une application affine bijective

Théorème L'image d'une conique par une application affine bijective est une conique de même nature.
L'image du centre d'une conique à centre est le centre de l'image.
L'image d'une asymptote d'une hyperbole est l'asymptote de l'image.

Remarquons que si $\mathscr{A}$ est une application affine bijective associée à l'application linéaire bijective $\mathscr{L}$, et si $(O,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ est un repère, alors les coordonnées du point $\mathscr{A}(M)$ dans $(O,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ sont les mêmes que les coordonnées de M dans $(\mathscr{A}^{-1}(O),\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{U}),\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{V}))$. En effet, la relation

$$\overrightarrow{\mathscr{A}^{-1}(O)M} = x\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{U}) + y\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{V})\,,$$

équivaut à

$$\mathscr{L}(\overrightarrow{\mathscr{A}^{-1}(O)M}) = \overrightarrow{O\mathscr{A}(M)} = x\overrightarrow{U} + y\overrightarrow{V}\,.$$

Il en résulte que l'équation de la conique $\mathscr{C}$ dans $(\mathscr{A}^{-1}(O),\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{U}),\mathscr{L}^{-1}(\overrightarrow{V}))$ est la même que l'équation de son image $\mathscr{C}'$ dans $(O,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$. Les coniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc de même nature.

Si la conique $\mathscr{C}$ a pour centre Ω, soit M_1 et M_2 deux points de $\mathscr{C}$ symétriques par rapport à Ω. Donc

$$\overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{M_2\Omega}\,,$$

et, par l'application affine,

$$\overrightarrow{\mathscr{A}(\Omega)\mathscr{A}(M_1)} = \overrightarrow{\mathscr{A}(M_2)\mathscr{A}(\Omega)}\,.$$

Donc $\mathscr{A}(\Omega)$ est le centre de $\mathscr{C}'$.

En particulier, si $\mathscr{C}$ et une hyperbole, ses asymptotes se coupent en Ω, et les asymptotes de l'image se coupent en $\mathscr{A}(\Omega)$. De plus la forme quadratique contenue dans l'équation de $\mathscr{C}$ peut se factoriser sous la forme $(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)$ et les droites vectorielles associées aux asymptotes ont pour équations

$$\alpha x+\beta y = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' x+\beta' y = 0\,.$$

L'application affine transforme la forme quadratique en un produit $(\gamma x+\delta y)(\gamma' x+\delta' y)$ et

$$\gamma x+\delta y = 0 \quad \text{et} \quad \gamma' x+\delta' y = 0\,,$$

seront les équations des droites vectorielles associées aux asymptotes de $\mathscr{C}'$. Ces équations se déduisent de celles de $\mathscr{C}$ par l'application linéaire $\mathscr{L}$ associée à $\mathscr{A}$. Il en résulte que $\mathscr{L}$ transforme les droites vectorielles associées aux asymptotes de $\mathscr{C}$ en celles associées aux asymptotes de $\mathscr{C}'$, et donc que $\mathscr{A}$ transforme les asymptotes de $\mathscr{C}$ en celles de $\mathscr{C}'$.

Remarque : en général, les images des foyers de $\mathscr{C}$ ne sont pas ceux de $\mathscr{C}'$, cependant, si l'application affine $\mathscr{A}$ vérifie, pour tout couple (P, Q) la relation

$$\|\overrightarrow{\mathscr{A}(P)\mathscr{A}(Q)}\| = \lambda \,\|\overrightarrow{PQ}\|$$

où λ est une constante fixe, alors les propriétés métriques se conserveront :
– l'image d'un foyer de $\mathscr{C}$ est un foyer de $\mathscr{C}'$;
– l'image d'une directrice de $\mathscr{C}$ est une directrice de $\mathscr{C}'$;
– les nombres a, b, c sont multipliés par λ ;
– les coniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont même excentricité.

Cas des affinités orthogonales

THÉORÈME Toute ellipse peut être considérée comme l'image d'un cercle par affinité orthogonale.

Soit, en axes orthonormés, le cercle d'équation

$$x^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \,,$$

et l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a. Si $M'(x', y')$ est l'image de $M(x, y)$ on a donc

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = \frac{b}{a}\, y$$

soit

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{b}\, y'$$

et, en reportant dans l'équation du cercle

$$x'^2 + \left(\frac{a}{b}\, y' - y_0\right)^2 = a^2$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(y' - \frac{b}{a}\, y_0\right)^2 = 1 \,.$$

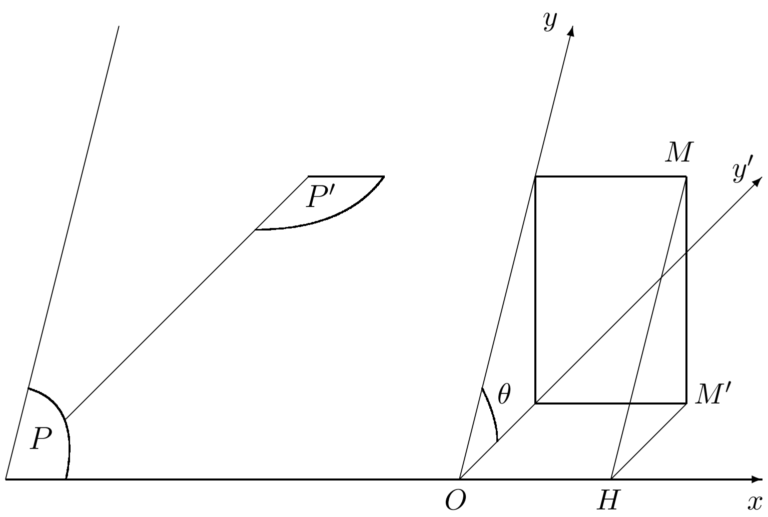
On obtient l'équation d'une ellipse.

Si $a \geq b$, c'est une ellipse d'axe focal parallèle à Ox et dans le cas contraire c'est une ellipse d'axe Oy.

Prenons le cas particulier où y_0 est nul, c'est-à-dire le cas où l'axe de l'affinité est l'axe focal de l'ellipse et un diamètre du cercle. Dans ce cas, si $a > b$, le cercle initial n'est autre que le cercle principal de l'ellipse. Si $a < b$, le cercle initial est inscrit dans l'ellipse.

On peut considérer toute ellipse comme l'image de son cercle principal dans une affinité orthogonale.

Comme une affinité orthogonale de rapport $\cos\theta$ peut être interprétée comme une projection orthogonale d'un plan P sur un plan P', les deux plans faisant l'angle θ, toute les propriétés du cercle qui se conservent par projection orthogonales seront encore valables pour une ellipse.



Théorème Le lieu des milieux des cordes d'une ellipse parallèles à une direction donnée est un diamètre de l'ellipse.

Cette propriété, vraie pour le cercle, se conserve par projection orthogonale.

Théorème L'aire de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ vaut πab.

L'aire de l'ellipse est l'aire du cercle multipliée par le cosinus de l'angle des plans, c'est-à-dire par le rapport d'affinité orthogonale qui transforme le cercle en ellipse. Ce rapport vaut b/a, et donc l'aire vaut

$$\boxed{S = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab}$$

On a des résultats analogues pour l'hyperbole.

Théorème Toute hyperbole peut être considérée comme l'image d'une hyperbole équilatère par affinité orthogonale.

L'hyperbole équilatère d'équation

$$x^2 - y^2 = 1$$

se transforme par affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a en l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Théorème
1) Si une droite coupe une hyperbole en P et P' et les asymptotes en Q et Q', les segments PP' et QQ' ont même milieu.
2) Si une droite est tangente en M à une hyperbole et coupe les asymptotes en Q_1 et Q'_1, alors M est le milieu de $Q_1Q'_1$ et le triangle $Q_1Q'_1O$ à une aire constante.
3) Le lieu des milieux des cordes PP' parallèles à une direction fixe est porté par une droite passant par O. De plus le produit $PQ \cdot PQ'$ est constant.

Ces propriétés se conservent par projection orthogonale (seul le fait que le produit $PQ \cdot PQ'$ reste constant n'est pas immédiat et sera démontré ensuite). Il suffit de les démontrer pour une hyperbole équilatère d'équation, en axes orthonormés,

$$y = \frac{K}{x}\,.$$

1) La droite d'équation

$$y = mx + h$$

coupe l'hyperbole en des points P et P' dont les abscisses sont les solutions de

$$mx^2 + hx - K = 0\,.$$

Si le points d'intersection existent, leur milieu a pour abscisse $-h/2m$. La droite PP' coupe les axes en des points Q et Q' de coordonnées $(-h/m, 0)$ et $(0, h)$. L'abscisse du milieu est encore $-h/2m$. Les milieux de PP' et QQ' sont donc confondus.

2) C'est un cas particulier de 1). Le résultat peut également se retrouver directement. Le coefficient directeur de la tangente en M est $-K/x^2$, celui de OM est

$$\frac{y}{x} = \frac{K}{x^2}\,.$$

Les triangles OMQ_1 et OMQ'_1 sont donc isocèles et par suite

$$MQ_1 = MO = MQ'_1\,.$$

De plus l'aire de ce triangle vaut

$$\frac{1}{2}\,OQ_1 \cdot OQ'_1 = 2xy = 2K\,.$$

3) Si m est constant, le milieu I des cordes a pour coordonnées $(-\frac{h}{2m}, \frac{h}{2})$, et donc I se trouve sur la droite d'équation

$$y = -mx\,.$$

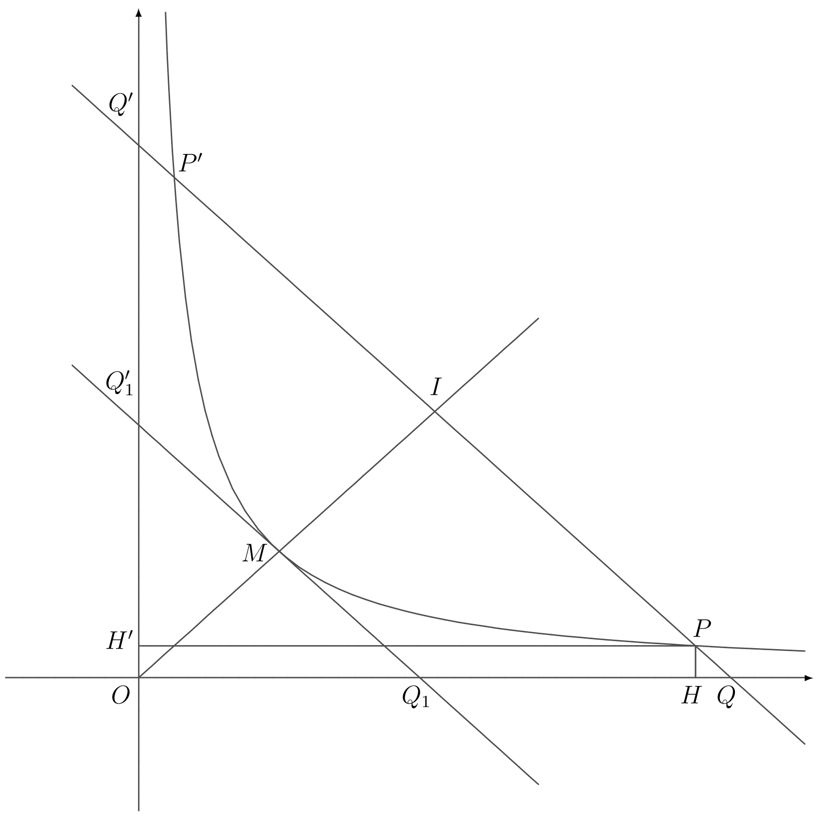
(On obtient seulement la portion de droite intérieure à l'hyperbole, formée de deux demi-droites dont les bornes sont les points où les tangentes à l'hyperbole ont pour direction m).

Enfin projetons P sur les axes en H et H', et appelons α l'angle fait par la droite variable et Ox. On a

$$PH = PQ \sin\alpha \quad \text{et} \quad PH' = PQ' \cos\alpha$$

d'où

$$PQ \cdot PQ' = \frac{2K}{\sin 2\alpha}\,.$$



Soit K un point de la droite QPQ'. On suppose que les points K, P, Q, Q' se projettent en K_1, P_1, Q_1 et Q'_1. Si les deux droites se coupent en Ω, il résulte du théorème de Thalès que

$$\frac{Q_1P_1}{QP} = \frac{Q'_1P_1}{Q'P} = \frac{\Omega K_1}{\Omega K}$$

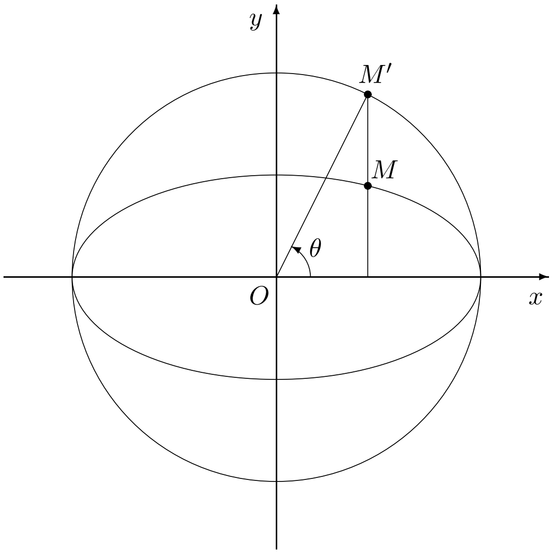
et donc

$$P_1Q_1 \cdot P_1Q'_1 = PQ \cdot PQ' \left(\frac{\Omega K_1}{\Omega K}\right)^2\,.$$

Le produit $P_1Q_1 \cdot P_1Q'_1$ reste donc lui aussi constant, lorsque $PQ \cdot PQ'$ est constant.
Le résultat est évident si les droites QPQ' et $Q_1P_1Q'_1$ sont parallèles.

Equations paramétriques d'une conique dont le centre est l'origine du repère

On obtient un paramétrage de l'ellipse par
$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array}\right. .$$
Le point M de l'ellipse de paramètre θ est l'image du point M' du cercle principal de coordonnées $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a. La droite MM' est donc orthogonale à Ox.



Pour l'hyperbole, on a le paramétrage
$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\,\tan t \end{array}\right. .$$
Mais on peut aussi paramétrer les deux branches
$$\left\{\begin{array}{l} x = a\,\mathrm{ch}\,\theta \\ y = b\,\mathrm{sh}\,\theta \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = -a\,\mathrm{ch}\,\theta \\ y = b\,\mathrm{sh}\,\theta \end{array}\right. .$$

Equations paramétriques d'une conique passant par l'origine du repère

Si la conique a pour équation
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0\,,$$
on la coupe par la droite variable d'équation $y = tx$. On obtient
$$Ax^2 + 2Btx^2 + Ct^2x^2 + Dx + Ety = 0\,,$$
d'où l'on tire, en simplifiant par x
$$x = -\frac{D + Et}{A + 2Bt + Ct^2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{Dt + Et^2}{A + 2Bt + Ct^2}\,.$$
L'origine O est obtenue lorsque t tend vers l'infini.

Equation polaire d'une conique

1) Soit l'ellipse passant par l'origine d'équation

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

On obtient en développant

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 2abx\,.$$

Si M a pour coordonnées polaires (ρ, θ), on a

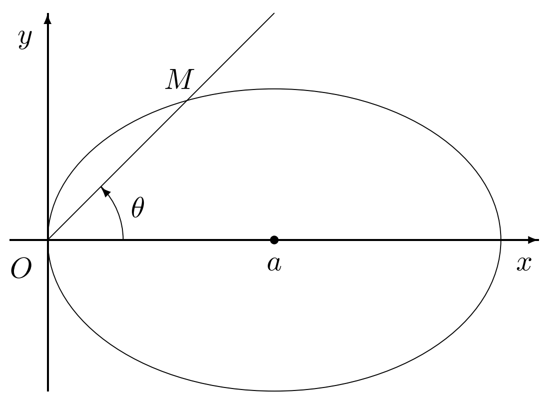
$$x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta$$

et, en remplaçant,

$$b^2\rho^2\cos^2\theta + a^2\rho^2\sin^2\theta = 2ab^2\rho\cos\theta\,,$$

d'où l'on tire l'équation polaire de l'ellipse

$$\boxed{\rho = \frac{2ab^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

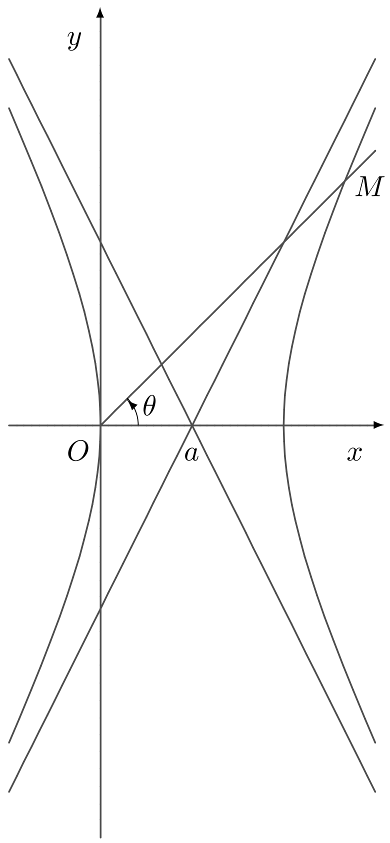


2) Pour l'hyperbole passant par l'origine d'équation

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

on obtient de même

$$\boxed{\rho = \frac{2ab^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}}$$

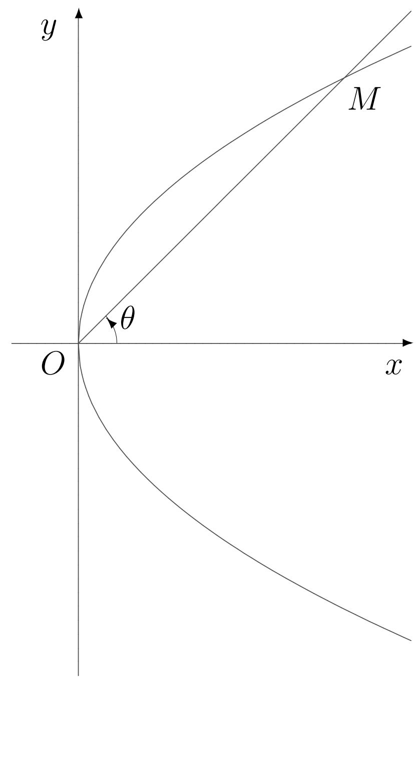


3) Pour la parabole passant par l'origine d'équation

$$y^2 = 2px\,,$$

on obtiendra

$$\boxed{\rho = 2p\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$



4) Conique dont le foyer est le pôle

Soit O un foyer de la conique, Ox l'axe focal et Δ la directrice associée à O d'équation

$$x = -\varphi$$

avec φ positif. Un point M de la conique se projette en H sur Oy. Si e est l'excentricité de la conique, on a

$$OM = e\,|x+\varphi|\,.$$

Les coordonnées polaires de M étant (ρ,θ) si $x > -\varphi$ et $(-\rho, \pi+\theta)$ si $x < -\varphi$, on trouve dans les deux cas

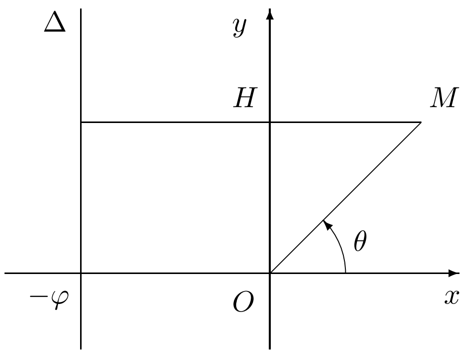
$$\rho = e(\rho\cos\theta + \varphi)\,,$$

d'où l'équation polaire

$$\rho = \frac{e\varphi}{1 - e\cos\theta}\,.$$

Mais, pour $\theta = \pi/2$, on obtient le point H tel que $\rho = p$ où p est le paramètre de la conique. On a donc finalement

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}}$$



Equations de la tangente et de la normale en un point d'une conique

Si une courbe de classe C^1 est définie par l'équation implicite

$$f(x,y) = 0\,,$$

on obtient l'équation de la tangente à la courbe en un point (x_0, y_0) à partir de la différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

en remplaçant dx et dy par $x - x_0$ et $y - y_0$ respectivement et en annulant la somme obtenue, soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0\,.$$

En particulier pour une conique d'équation implicite

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

on aura,

$$df = (2Ax + 2By + D)dx + (2Bx + 2Cy + E)dy\,,$$

d'où l'équation de la tangente en (x_0, y_0),

$$(2Ax_0 + 2By_0 + D)(x - x_0) + (2Bx_0 + 2Cy_0 + E)(y - y_0) = 0\,.$$

1) Dans le cas de l'ellipse d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,,$$

on obtient donc,

$$\frac{2x(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y(y - y_0)}{b^2} = 0\,,$$

ou encore,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\,,$$

c'est-à-dire ,

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Le vecteur $(x_0/a^2, y_0/b^2)$ est un vecteur directeur de la normale. On déduit alors facilement l'équation de la normale en M

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_0/a^2 & y_0/b^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

d'où,

$$\frac{y_0}{b^2}\,(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}\,(y - y_0) = 0\,.$$

On en déduit

$$\boxed{a^2 y_0 x - b^2 x_0 y = c^2 x_0 y_0}$$

2) Dans le cas de l'hyperbole d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,,$$

on obtiendra par un calcul analogue l'équation de la tangente,

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

et celle de la normale

$$\boxed{a^2y_0x + b^2x_0y = c^2x_0y_0}$$

3) Si une conique est donnée par son équation polaire

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}\ ,$$

l'équation de la tangente à la courbe au point d'angle polaire α est

$$\boxed{\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha) - e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

On a

$$\rho'(\alpha) = -\frac{pe\sin(\alpha - \theta_0)}{(1 - e\cos(\alpha - \theta_0))^2}\ ,$$

et si V est l'angle que fait la tangente au point α avec le rayon vecteur, on a

$$\tan V = \frac{\rho(\alpha)}{\rho'(\alpha)} = -\frac{(1 - e\cos(\alpha - \theta_0))^2}{pe\sin(\alpha - \theta_0)}\,\frac{p}{1 - e\cos(\alpha - \theta_0)} = -\frac{1 - e\cos(\alpha - \theta_0)}{e\sin(\alpha - \theta_0)}\ .$$

La tangente fait un angle $\alpha + V$ avec l'axe Ox et a donc une équation polaire de la forme

$$r = \frac{a}{\sin(\theta - (\alpha + V))}\ .$$

On détermine a, en écrivant qu'au point α, la tangente passe par le point de coordonnées polaires $(\alpha, \rho(\alpha))$, donc

$$\frac{a}{\sin(\alpha - (\alpha + V))} = \frac{p}{1 - e\cos(\alpha - \theta_0)}\ ,$$

d'où l'on déduit

$$a = -\frac{p\sin V}{1 - e\cos(\alpha - \theta_0)}\ .$$

L'équation polaire de la tangente est donc

$$r = -\frac{p\sin V}{(1 - e\cos(\alpha - \theta_0))\sin(\theta - (\alpha + V))}\ .$$

En développant, on trouve

$$r = -\frac{p\sin V}{(1 - e\cos(\alpha - \theta_0))(\sin(\theta - \alpha)\cos V - \cos(\theta - \alpha)\sin V)}\ ,$$

puis en divisant par $\cos V$,

$$r = -\frac{p\tan V}{(1 - e\cos(\alpha - \theta_0))(\sin(\theta - \alpha) - \cos(\theta - \alpha)\tan V)}\ .$$

Alors en remplaçant $\tan V$ par sa valeur

$$r = \frac{p\dfrac{1-e\cos(\alpha-\theta_0)}{e\sin(\alpha-\theta_0)}}{(1-e\cos(\alpha-\theta_0))\left(\sin(\theta-\alpha)+\cos(\theta-\alpha)\dfrac{1-e\cos(\alpha-\theta_0)}{e\sin(\alpha-\theta_0)}\right)}\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
r &= \frac{p}{e\sin(\alpha-\theta_0)\sin(\theta-\alpha)+\cos(\theta-\alpha)(1-e\cos(\alpha-\theta_0))}\\
&= \frac{p}{-e[-\sin(\alpha-\theta_0)\sin(\theta-\alpha)+\cos(\theta-\alpha)\cos(\alpha-\theta_0)]+\cos(\theta-\alpha)}\\
&= \frac{p}{-e[\cos((\theta-\alpha)+(\alpha-\theta_0))+\cos(\theta-\alpha)}\\
&= \frac{p}{-e\cos(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\alpha)}
\end{aligned}$$

Méthode de la bande de papier

Théorème   On se donne deux axes orthogonaux Ox et Oy et trois points Q, P, M alignés dans cet ordre, tels que P soit sur Ox, Q sur Oy avec

$$PM = b \quad \text{et} \quad QM = a\,.$$

Le lieu du point M lorsque la droite QPM varie est une ellipse de centre O et de demi-axes a et b.

Si I est le point qui a même abscisse que P et même ordonnée que Q, la normale en un point M passe par I.

Si l'on projette orthogonalement M en M'' sur Ox et en M' sur QI, et si l'on appelle α l'angle que fait QM avec Ox, on a

$$\cos\alpha = \frac{QM'}{QM} = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{MM''}{PM} = \frac{y}{b}\,,$$

et donc, M a pour coordonnées,

$$x_0 = a\cos\alpha \quad \text{et} \quad y_0 = b\sin\alpha\,.$$

Le point M décrit l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

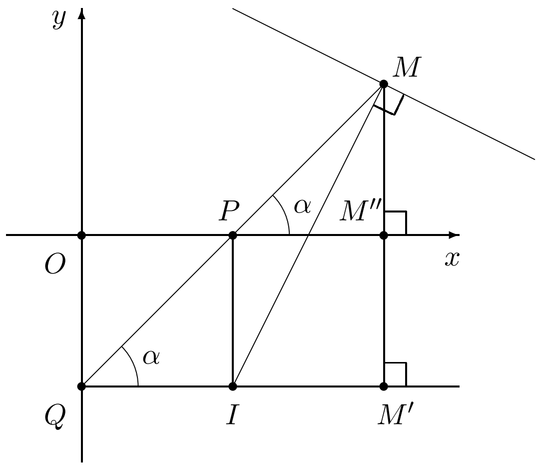
Le point I a pour coordonnées $((a-b)\cos\alpha, -(a-b)\sin\alpha)$. D'autre part, l'équation de la normale en M est

$$a^2y_0x - b^2x_0y = c^2x_0y_0$$

soit, en remplaçant x_0 et y_0 par leur valeur, et en divisant par ab

$$(a \sin \alpha)x - (b \cos \alpha)y = c^2 \sin \alpha \cos \alpha \, .$$

On constate facilement que les coordonnées de I vérifient l'équation de cette droite.



Sections planes de cônes et de cylindres : théorèmes de Dandelin

> Théorème La section d'un cylindre de révolution par un plan P non parallèle aux génératrices est une ellipse dont le petit axe est égal au diamètre du cylindre.

Remarque : lorsque P est parallèle aux génératrices on obtient une intersection formée de deux génératrices parallèles.

On considère les deux sphères (O, r) et (O', r) inscrites dans le cylindre et tangentes au plan P en F et F' respectivement. Si l'on prend une génératrice quelconque, les deux sphères sont tangentes en H et H' respectivement. Soit M le point d'intersection de la génératrice et de P. On a

$$MF = MH \, ,$$

puisque ce sont deux tangentes à (O, r) issues de M. De même

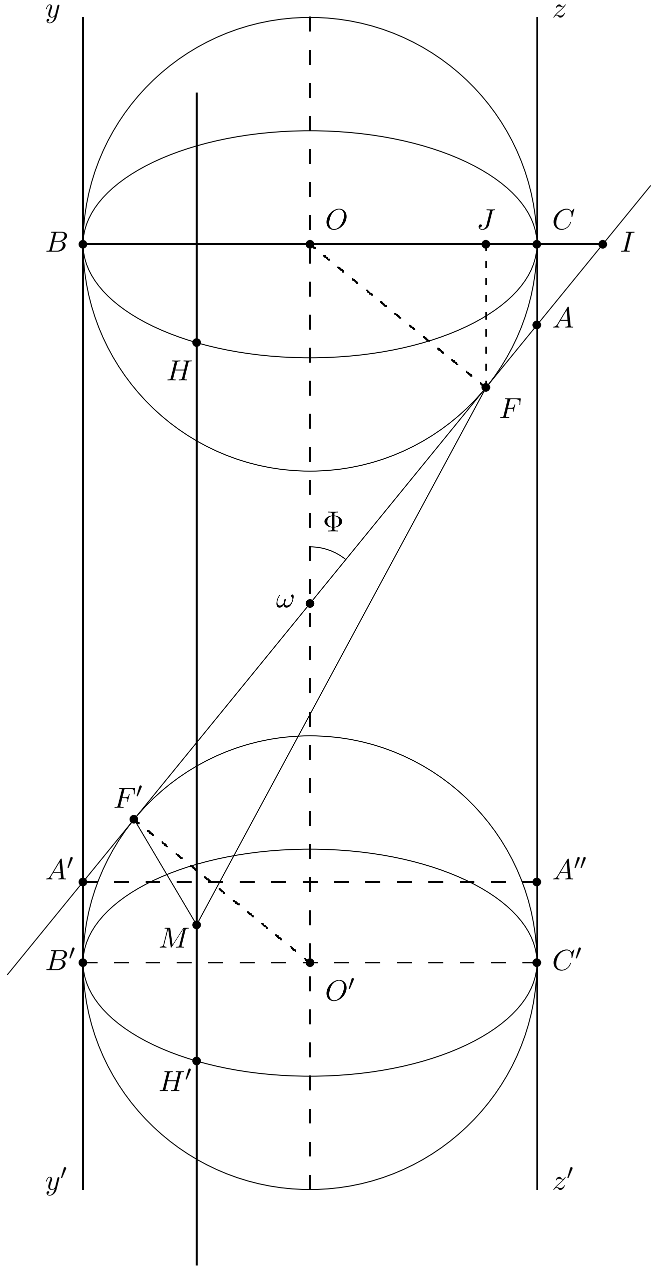
$$MF' = MH' \, ,$$

et donc,

$$MF + MF' = MH + MH' = HH' = OO' \, .$$

Si l'on note $2a$ cette longueur, le point M appartient à l'ellipse de foyers F et F' et d'axe principal $2a$. Les extrémités de cet axe sont les points A et A', intersections de la droite FF' et du cylindre et donc

$$OO' = CC' = AF + AF' = FF' + 2AF \, .$$



Notons A'' le symétrique de A' par rapport à l'axe du cylindre. On a

$$2c = FF' = CC' - 2AF = CC' - 2AC = AA''\,.$$

Alors, comme le triangle $AA'A''$ est rectangle,

$$4r^2 = A'A''^2 = AA'^2 - AA''^2 = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2\,,$$

ce qui prouve que le petit axe de l'ellipse est le diamètre du cylindre.

On a aussi

$$e = \frac{c}{a} = \frac{AA''}{AA'} = \cos\Phi\,,$$

où Φ est l'angle que fait le plan sécant avec l'axe du cylindre.

Le centre ω de l'ellipse est l'intersection de AA' avec l'axe du cylindre.

La directrice Δ associée à F est la polaire de F par rapport au cercle principal. Son pied est conjugué harmonique de F par rapport à A et A'. Appelons yy' et zz' les génératrices du cylindre passant par A et A'. Elles engendrent le plan P'. Soit BC le diamètre de la sphère (O, r) situé dans P'. Projetons orthogonalement F sur BC en J, et, soit I l'intersection de AA' et de BC. Comme IF est la tangente issue de I au cercle (O, OB), la droite FJ est la polaire de I par rapport à ce cercle et donc (IJ, BC) est une division harmonique. Il en résulte que (IF, AA') est une division harmonique, et donc que I est le pied de la polaire de F par rapport au cercle principal. Cette polaire est la droite perpendiculaire au plan P' en I. C'est aussi l'intersection de P avec le plan orthogonal à P' le long de BC. (Voir la figure du bas de la page 58).

Inversement, tout point de l'ellipse appartient à l'intersection de P et du cylindre. En effet, si un point N de l'ellipse se projette en N' sur le plan P', le point N' appartient à AA'. La demi-droite $[N'N[$ coupe le cylindre en un point et un seul qui appartient à l'intersection du plan et du cylindre : c'est donc N.

Application : comment placer une ellipse donnée par a et b sur un cylindre de rayon r ?

Le problème n'a pas de solution si b et r sont distincts. Dans le cas contraire, il est facile de construire le triangle $AA'A''$ rectangle en A'', dont on connaît l'hypothénuse $2a$ et un côté $2c$, ce qui permet de retrouver l'ellipse. Elle est évidemment définie à une rotation près autour de l'axe du cylindre et à une translation près le long de cet axe.

Théorème La section d'un cône de révolution par un plan P coupant les génératrices d'une seule nappe du cône est une ellipse.

Nous appellerons S le sommet du cône et α l'angle formé par une génératrice avec l'axe de rotation du cône.

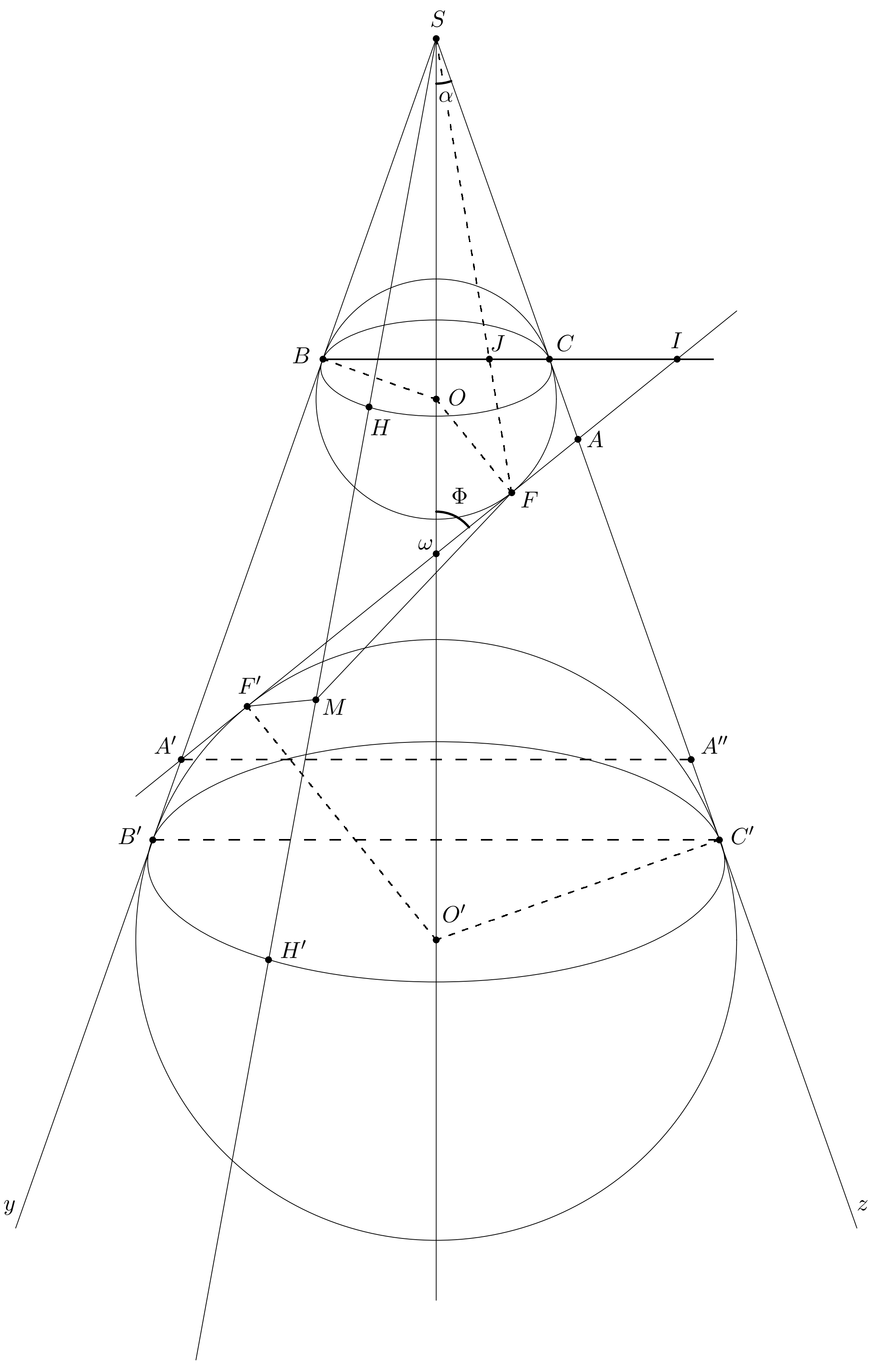
On considère les deux sphères (O, r) et (O', r) inscrites dans le cône et tangentes au plan P en F et F' respectivement. Si l'on prend une génératrice quelconque, les deux sphères sont tangentes en H et H' respectivement. Soit M le point d'intersection de la génératrice et de P. On a, comme dans le cas du cylindre,

$$MF = MH \quad \text{et} \quad MF' = MH',$$

et donc,

$$MF + MF' = MH + MH' = HH',$$

et cette valeur ne dépend pas de la génératrice. On note $2a$ sa valeur. Le point M appartient à l'ellipse de foyers F et F', et il est facile de voir que tout point de l'ellipse est dans l'intersection.


S
α
B
J
C
I
O
H
A
Φ
F
ω
F′
M
A′
A″
B′
C′
O′
H′
y
z

Soit A et A' les intersections de l'axe focal avec le cône et A'' le symétrique de A' par rapport à l'axe du cône. Comme pour le cylindre, on a

$$2a = AA' \quad \text{et} \quad 2c = FF' = AA''\,.$$

Par contre l'axe $2b$ ne se lit pas facilement sur le dessin. Il se calcule cependant

$$4b^2 = 4a^2 - 4c^2 = AA'^2 - AA''^2 = SA'^2 + SA^2 - 2SA\cdot SA'\cos 2\alpha - (SA' - SA)^2$$

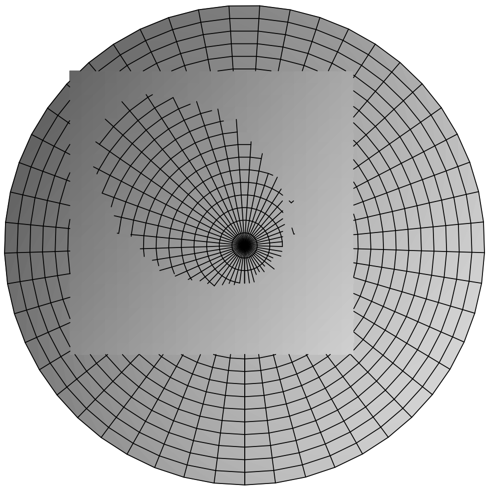
d'où

$$4b^2 = 2SA\cdot SA'(1-\cos 2\alpha) = 4\sin^2\alpha\, SA\cdot SA'\,.$$

L'excentricité e est égale à AA''/AA'. Nous verrons plus loin qu'elle s'exprime en fonction de l'angle α et de l'angle Φ que fait le plan P avec l'axe du cône.

Pour la directrice Δ associée à F, on procède comme pour le cylindre. Soit I l'intersection de BC et AA' et J l'intersection de SF et de BI. La polaire de S par rapport au cercle (O, OB) est la droite BC et contient I. Donc la polaire de I par rapport à ce cercle passe par S. Elle passe aussi par F puisque IF est tangente au cercle. C'est donc la droite SF et (IJ, BC) forme une division harmonique. Alors il en est de même de (IF, AA') et I est le pied de la polaire de F par rapport au cercle principal. C'est donc le pied de la directrice.

Voici l'intersection du cône d'équation $x^2+y^2 = (1-z)^2$ et du plan d'équation $x+y-2z-3=0$ vue par dessus :



Application : comment placer une ellipse donnée par a et c sur un cône de révolution donné de demi-angle α ?

On construit le triangle $AA'A''$ avec

$$AA' = 2a\,,\ AA'' = 2c\,,\ \widehat{A''} = \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Un tel triangle existe toujours. Le sommet S du cône est alors situé sur AA'' et sur la médiatrice de $A'A''$. Il y a toujours une solution définie à une rotation près autour de l'axe du cône.

Théorème La section d'un cône de révolution par un plan P coupant les deux nappes du cône est une hyperbole.

Remarque : si le plan passe par S, l'hyperbole est dégénérée en deux droites se coupant en S.

La méthode est la même que dans le cas précédent. On part de deux sphères (O,r), (O',r') tangentes au plan P et exinscrites dans le cône. On appelle F et F' les points du plan P où les sphères sont tangentes. Si une génératrice du cône est tangente aux sphères en H et H' et si M est le point de cette génératrice situé dans P, le point M est à l'extérieur de HH' et cette fois

$$|MF - MF'| = |MH - MH'| = HH' = 2a = AA'\,.$$

On obtient bien une hyperbole de foyers F et F'. Inversement tout point de l'hyperbole appartient à la section.

On obtient encore

$$2c = FF' = AA'' \quad , \quad 4b^2 = 4\sin^2\alpha\, SA\cdot SA' \quad \text{et} \quad e = \frac{AA''}{AA'}\,.$$

Les directrices s'obtiennent comme pour l'ellipse. Le centre ω de l'hyperbole est le milieu de AA' et FF'. C'est le point d'intersection des asymptotes. On trouvera la direction de ces asymptotes en coupant le cône par un plan parallèle à P et passant par S. On obtient deux génératrices du cône Su et Sv, qui sont parallèles aux asymptotes. Leur angle est donc toujours inférieur à 2α. Donc, si θ est l'angle que font les asymptotes avec l'axe focal, il y aura une valeur maximale de cet angle, et donc une valeur maximale de l'excentricité :

$$e = \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Application : comment placer une hyperbole donnée par a et c sur un cône de révolution donné de demi-angle α ?

D'après ce qui précède, le problème est impossible si

$$\frac{c}{a} > \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

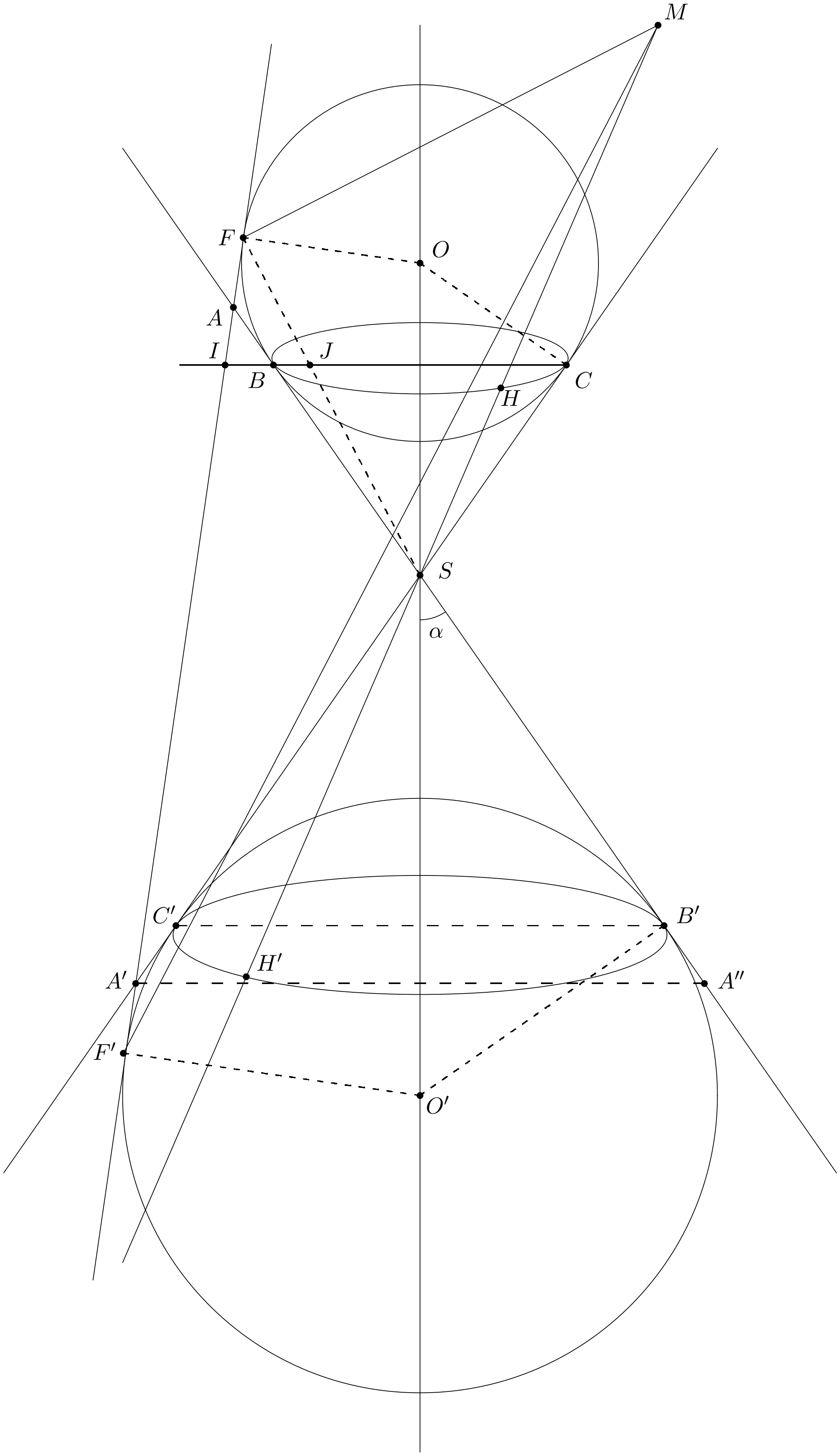
On placera encore le triangle $AA'A''$ tel que

$$AA' = 2a\,,\ AA'' = 2c\,,\ \widehat{A''} = \frac{\pi}{2} - \alpha\,,$$

ce qui n'est effectivement possible que si

$$\frac{1}{\cos\alpha} < \frac{c}{a}\,.$$

L 56



Théorème La section d'un cône de révolution par un plan P parallèle à un plan tangent au cône et ne passant pas par le sommet est une parabole.

On trace tout d'abord la sphère (O, r) inscrite dans le cône et tangente au plan P en F.

Soit Sy et Sz les génératrices du cône situées dans le plan P' orthogonal à P, et soit B et C les points où la sphère (O, r) est tangente à ces génératrices. La droite Fy' intersection de P et P' est parallèle à Sy. Elle recoupe Sz en A et BC en I. Soit Δ la droite de P orthogonale à BC et à Fy en I. Elle est donc orthogonale au plan P'.

Par ailleurs, si St est une génératrice quelconque du cône et M le point de P situé sur cette génératrice, on appelle H le point de la sphère (O, r) où elle est tangente à St. Soit β et γ les homothétiques de B et C dans l'homothétie de centre S qui transforme H en M. Donc $\beta\gamma$ est parallèle à BC, et les plans HBC et $M\beta\gamma$ sont parallèles.
Enfin, soit μ la projection orthogonale de M sur $\beta\gamma$. Alors $M\mu$ est parallèle à Δ et μ appartient à l'intersection de $\beta\gamma$ et de Fy'. Soit également ν la projection orthogonale de M sur Δ. On a

$$MF = MH$$

comme tangentes issues de M à la même sphère (O, r),

$$MH = B\beta$$

comme portions de génératrices comprises entre deux plans parallèles,

$$B\beta = \mu I$$

comme côtés opposés d'un parallélogramme, et enfin

$$\mu I = M\nu$$

comme côtés opposés d'un rectangle. On en déduit que

$$MF = M\nu\,,$$

et donc que M se trouve sur la parabole de foyer F et de directrice Δ.

Réciproquement, tout point de la parabole appartient à la section.

Le sommet de la parabole est en A et le paramètre vaut

$$p = IF = 2AF = 2AC\,.$$

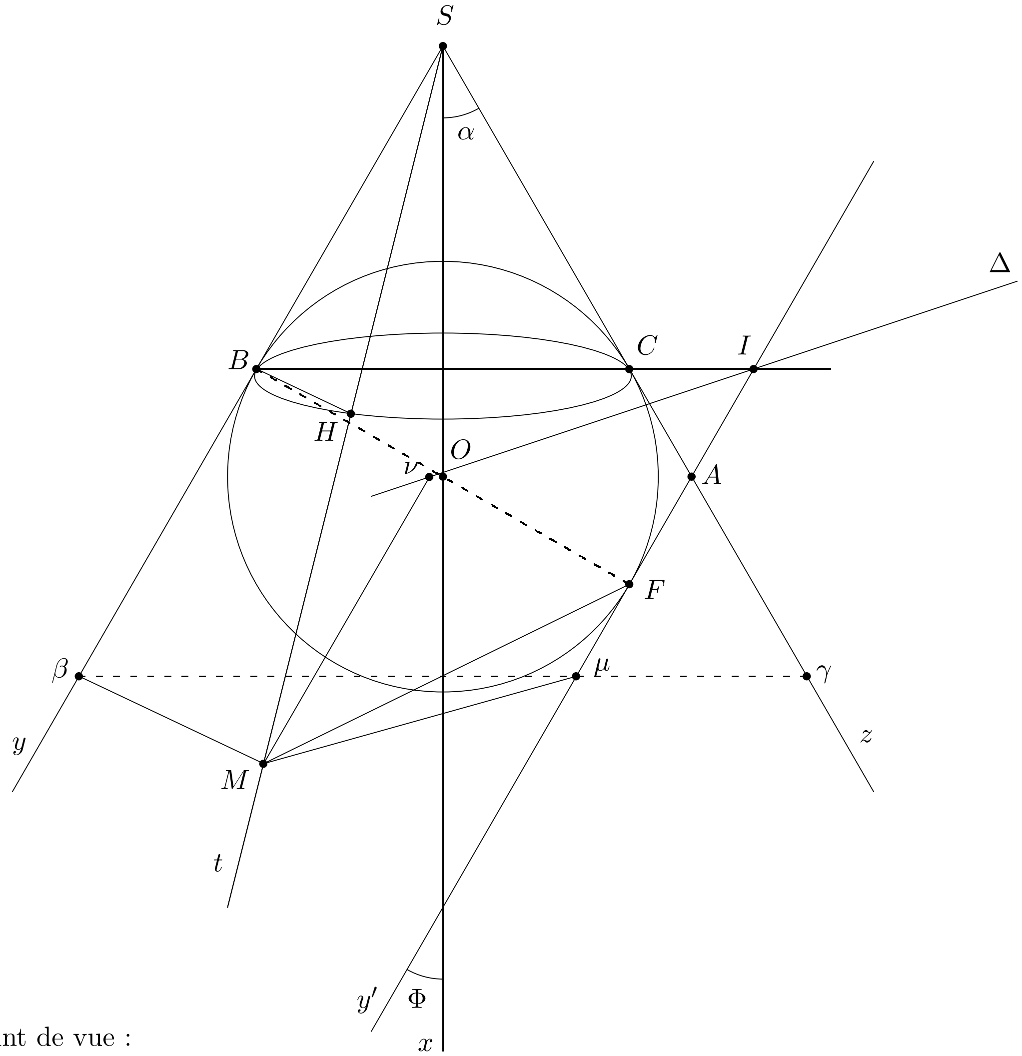
Application : comment placer sur un cône de révolution de demi-angle α une parabole donnée ?

On trace tout d'abord le triangle rectangle OAC où

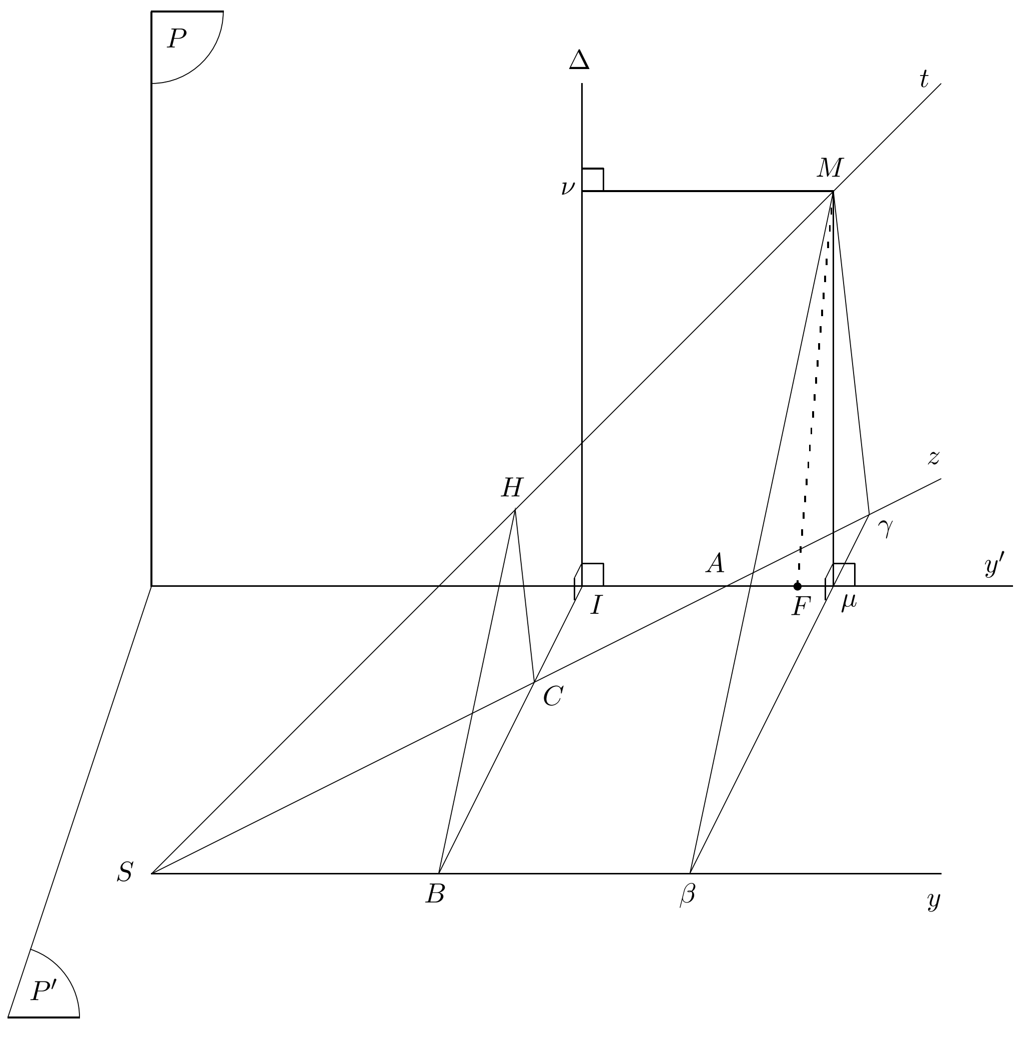
$$AC = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Le prolongement de AC coupe la perpendiculaire en O à OA en S, sommet du cône, dont on a alors l'axe et la génératrice.

L 58



Autre point de vue :



Théorème général La section plane d'un cône de révolution ou d'un cylindre est une conique d'excentricité

$$e = \frac{\cos\Phi}{\cos\alpha}$$

où α est le demi-angle du cône et vaut 0 pour le cylindre, et Φ l'angle que fait le plan sécant avec l'axe du cône ou du cylindre.

Le résultat est déjà démontré dans le cas du cylindre et dans le cas où la section est une parabole, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \Phi$.

Pour étudier les autres cas, le dessin est semblable à celui fait dans le cas de la parabole, avec la différence que IF n'est plus parallèle à Sy mais fait un angle Φ avec l'axe Sx du cône. On a encore

$$MF = MH = C\gamma \quad \text{et} \quad M\nu = \mu I\,,$$

donc

$$e = \frac{MF}{M\nu} = \frac{C\gamma}{\mu I}\,.$$

En utilisant le théorème de Thallès,

$$\frac{C\gamma}{\mu I} = \frac{CA}{AI}\,.$$

D'autre part, dans le triangle CAI,

$$\frac{CA}{\sin\widehat{I}} = \frac{AI}{\sin\widehat{C}}\,.$$

Enfin, $\widehat{I}$ et Φ sont complémentaires, ainsi que $\widehat{C}$ et α, d'où

$$e = \frac{CA}{AI} = \frac{\sin\widehat{I}}{\sin\widehat{C}} = \frac{\cos\Phi}{\cos\alpha}\,.$$

On remarque donc que, si le plan coupe l'axe de révolution orthogonalement, on a $\Phi = \pi/2$, et donc l'excentricité est nulle. On obtient un cercle.
Si α est inférieur à Φ, on obtient une ellipse, si $\alpha = \Phi$, on a une parabole, et si α est supérieur à Φ un hyperbole. L'hyperbole la plus ouverte possible étant obtenue lorsque le plan sécant est parallèle à l'axe du cône. L'excentricité vaut alors $1/\cos\alpha$.

Conséquence : si l'on coupe par des plans parallèles, on obtient des coniques de même excentricité, et donc de même nature, homothétiques les unes des autres dans une homothétie de centre S. Les hyperboles conservent l'angle que font les asymptotes avec l'axe focal.

Lieu des sommets d'un cône de révolution portant une conique donnée

Si la conique est une ellipse de foyers F et F' et de sommets situés sur l'axe focal AA' tracé dans le plan Q, soit Q' le plan orthogonal à Q situé le long de FF'. Si S est le sommet du cône portant l'ellipse, on aura, avec les notations du paragraphe précédent, la relation (voir figure page 53)

$$|SA' - SA| = AA'' = 2c = FF' .$$

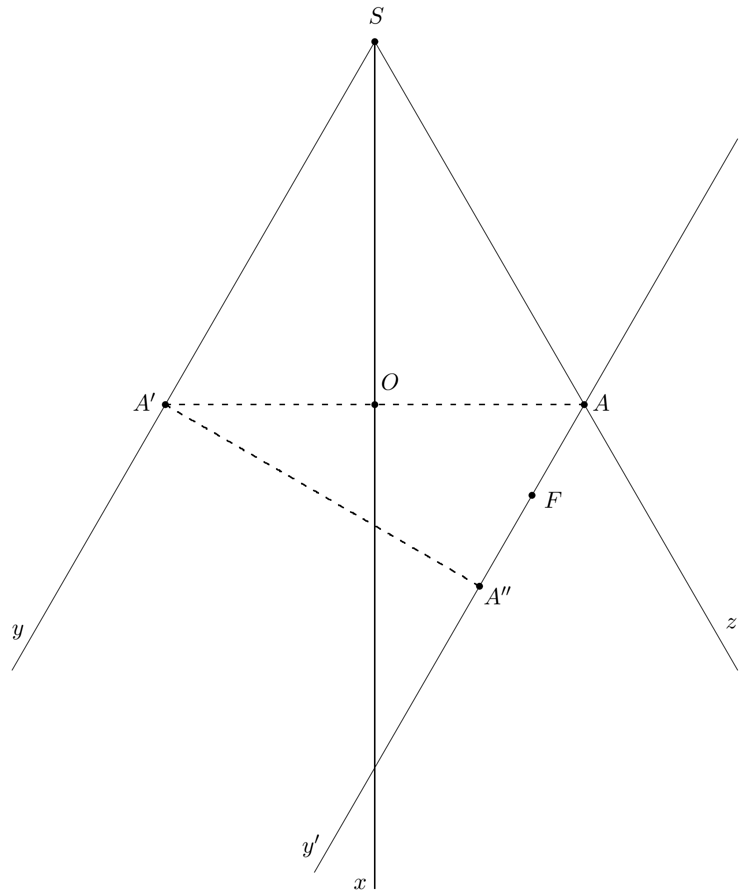
Donc S appartient à l'hyperbole de foyers A et A' et de sommets F et F' tracée dans le plan Q'. De plus, l'axe du cône est bissectrice de $\widehat{ASA'}$, donc tangent à l'hyperbole, qui est donc aussi l'enveloppe des axes de symétrie des cônes.

Si la conique est une hyperbole, on trouve de même (voir figure page 56) que S appartient à une ellipse de foyers A et A' et de sommets F et F' tracée dans le plan Q', et cette ellipse est l'enveloppe des axes de symétrie des cônes.

Si la conique est une parabole définie par son sommet A et son foyer F, soit Q' le plan orthogonal à Q le long de AF. Le sommet S d'un cône de révolution portant la parabole se trouve dans Q'. Appelons A' le symétrique de A par rapport à O et A'' le symétrique de A par rapport à F. La droite $A'A''$ est orthogonale à Sy et à AF. C'est une droite fixe et l'on a

$$SA' = SA .$$

Donc S se trouve sur la parabole de foyer A et de directrice $A'A''$, donc de sommet F. C'est encore l'enveloppe des axes de symétrie des cônes portant la parabole donnée.



On dit que les courbes ainsi associées sont les **focales** l'une de l'autre.

Remarques

1) L'ensemble des sommets d'un cône portant une conique donnée étant une conique, il en résulte que tout cône dont la base est une conique n'est pas nécessairement de révolution.

2) On peut démontrer (voir DL) que l'intersection d'un cône ou d'un cylindre dont la base est une conique avec un plan est toujours une conique, même si le cône n'est pas de révolution.