

# *Les maths des jeux quantiques*

RUBÉN MARTOS

Article soumis à *Images des Maths*

(Commentaire de AZIZ EL KACIMI)

Article intéressant sur les *jeux quantiques*. On y apprend des choses ! L'ordre de difficulté ne paraît pas excessif mais sa lecture exige tout de même un peu de concentration. N'étant pas spécialiste du sujet, je n'ai pas vérifié en détail les calculs et les démonstrations ; mais rien ne m'a interpellé sur ce qui laisserait penser qu'il y a des erreurs. D'autant plus que l'auteur remercie Aurélien et Jérôme pour les remarques qu'ils lui ont faites. Je suppose donc qu'ils ont examiné la partie mathématique propre au sujet. Ainsi que Shalom et Sébastien qui en ont fait aussi la relecture et signalé des coquilles à corriger.

Mais j'ai tout de même des remarques sur le contenu de certains déroulants. Je rappelle que l'intérêt d'un déroulant est de donner des définitions et introduire des notions utilisées dans le texte pour ne pas obliger le lecteur à aller voir ailleurs à cet effet. Ce qu'on y met doit donc être le plus clair possible.

## 1. Produit scalaire hermitien

- Le contenu de ce déroulant est « sombre ». D'abord je l'aurais intitulé *Produit scalaire et produit hermitien* (ce sont a priori deux choses différentes). Tant qu'à faire, il faut donner les bonnes définitions, même si elles semblent « scolaires ». En suivant par exemple le schéma qui suit.

- Définir un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel  $E$  : c'est une forme bilinéaire  $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  symétrique définie positive. Cela veut dire :

- (i) Pour  $u \in E$  fixé, l'application partielle  $\Phi(u, \cdot)(z) = \Phi(u, z)$  est linéaire ; de même, pour  $v \in E$  fixé, l'application partielle  $\Phi(\cdot, v)(z) = \Phi(z, v)$  est linéaire.
- (ii)  $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$  pour tous  $u, v \in E$ .
- (iii) Le nombre  $\Phi(u, u)$  est positif pour tout  $u \in E$  et n'est nul que si  $u = 0$ .

- Définir un *produit hermitien* sur un espace vectoriel complexe  $E$  : c'est une forme sesquilinéaire  $\Psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$  hermitienne définie positive. Cela veut dire :

- (i)' Pour  $v \in E$  fixé, l'application partielle  $\Psi(\cdot, v)(z) = \Psi(z, v)$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et pour  $u \in E$  fixé, l'application partielle  $\Psi(u, \cdot)(z) = \Psi(u, z)$  est anti-linéaire *i.e.* elle est additive et vérifie  $\Psi(u, \cdot)(\alpha z) = \overline{\alpha} \Psi(u, \cdot)(z)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
- (ii)' Hermitienne signifie  $\Psi(u, v) = \overline{\Psi(v, u)}$  pour tous  $u, v \in E$  ; ce qui équivaut à  $\Psi(u, u)$  réel pour tout  $u \in E$ .
- (iii)' Le nombre  $\Psi(u, u)$  est positif pour tout  $u \in E$  et n'est nul que si  $u = 0$ .

## 2. Espaces de Hilbert

L'auteur ne donne pas la bonne définition d'un *espace de Hilbert*. D'abord pourquoi impose-t-il à l'espace vectoriel d'être complexe et de dimension infinie ? Il faut reprendre la rédaction de ce déroulant.

a) Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou d'un produit hermitien (noté aussi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

b) Aussi bien dans le cas réel que dans le cas complexe,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  donne lieu à une norme sur  $E$  :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ . Si l'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est complet, on dira que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un *espace de Hilbert*.

En aucune manière il ne faut écarter les espaces de dimension finie : ils sont les premiers exemples évidents et les « approximatifs » (pour les besoins de l'analyse numérique par exemple) de ceux de dimension infinie !

Un espace de Hilbert possède toujours une base hilbertienne ; mais celle-ci n'est pas forcément dénombrable. En voici un exemple (simple et qui n'a rien de pathologique).

Soit  $I$  un ensemble (infini) non dénombrable muni de la tribu  $\mathcal{P}(I)$  (constituée de toutes les parties de  $I$ ). On note  $m$  la mesure de comptage sur  $\mathcal{P}(I)$  *i.e.* celle définie par :

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $|A|$  est le cardinal de  $A$ . Alors l'espace vectoriel  $L^2(I, m)$  des fonctions  $I \rightarrow \mathbb{R}$  de carré intégrable pour la mesure  $m$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \int_I x(i)y(i)dm(i).$$

Il a  $\{e_i : i \in I\}$  comme base hilbertienne naturelle où  $e_i$  est la fonction réelle sur  $I$  définie par  $e_i(j) = \delta_i^j$  (1 si  $i = j$  et 0 sinon). Cette base n'est évidemment pas dénombrable (et toute autre base hilbertienne lui est équipotente).

**Une autre terminologie pour introduire l'exemple :** l'espace  $L^2(I, m)$  est aussi l'espace  $\ell^2(I)$  des familles (indexées par  $I$ ) de réels  $(x_i)_{i \in I}$  de carré sommable muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i y_i$  (où  $x = (x_i)_{i \in I}$  et  $y = (y_i)_{i \in I}$ ).

En fait, tout espace de Hilbert  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est isomorphe à  $\ell^2(I)$  où  $I$  est un ensemble fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable. Le cas  $I$  fini correspond aux espaces de Hilbert de dimension finie. (Évidemment, tout ceci a une version complexe.)