

Percolation de la rigidité

J. Barré¹

¹*Laboratoire Dieudonné, UMR CNRS 7351, Université de Nice-Sophia Antipolis, France*

September 2, 2014

1 Introduction

S'il est naturel que les jeux de réflexion soient à l'origine de questions mathématiques variées, on imagine moins facilement que cela puisse être aussi le cas de jeux pour tout-petits. Les boules et barres aimantées de la figure 1 sont destinées aux enfants d'un an environ. Les boules jouent le rôle de pivots, autour desquels les barres peuvent tourner librement; les barres peuvent avoir des longueurs différentes, et chacune fixe la distance entre deux boules. Les structures ainsi formées peuvent être déformables, ou rigides. Sur l'exemple de la figure 1 à gauche, on voit facilement que la structure est rigide; mais on s'aperçoit vite que si le nombre de barres et de pivots augmente, la question est beaucoup plus ardue; il n'est pas si facile de déterminer par exemple si la structure de la figure 1 à droite est rigide ou pas. Cette question naturelle et intuitive va nous entraîner de la géométrie algébrique à la théorie des graphes, aux probabilités et à la physique. Nous rencontrerons de beaux théorèmes, pas toujours difficiles à démontrer, mais surtout beaucoup plus de questions ouvertes que de problèmes résolus. La théorie de la rigidité dont il sera question ici est un domaine vivant et varié, auquel il ne sera pas véritablement rendu justice : en effet, cet article se concentrera sur les aspects probabilistes du problème.

Pour simplifier, et c'est ce que nous ferons dans la plus grande partie de l'article, nous avons considéré une structure de barres et de pivots en deux dimensions. Il est clair qu'on peut imaginer beaucoup de problèmes analogues, décrivant d'autres situations : par exemple une structure de barres et de pivots en trois dimensions, comme à la figure 2; ou une structure, en deux ou trois dimensions, dans laquelle les pivots seraient remplacés par des corps solides; on peut aussi imaginer qu'en plus de la contrainte de distance (une barre fixe la distance entre deux pivots), l'angle entre deux barres adjacentes au même pivot soit fixé.

Ce dernier exemple n'est pas choisi au hasard : la longueur d'une liaison chimique entre deux atomes, ainsi que l'angle entre deux liaisons adjacentes peuvent parfois être considérées comme constantes. Cette idée est à l'origine de l'utilisation de la théorie de la rigidité pour étudier certains verres, comme ceux

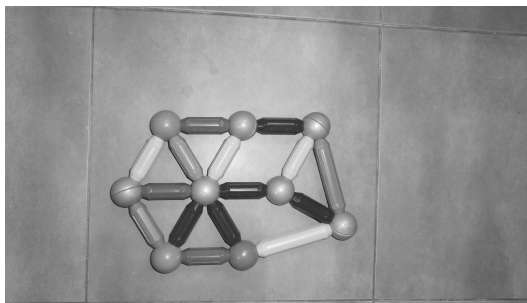
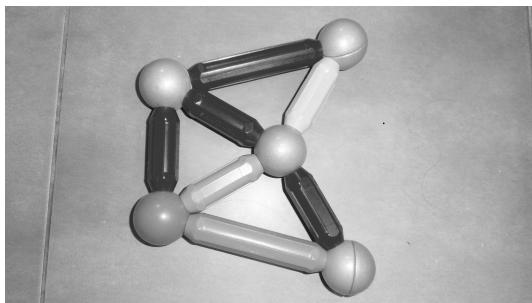


Figure 1: Structures de barres et pivots en 2D. Celle de gauche est rigide; et celle de droite ?

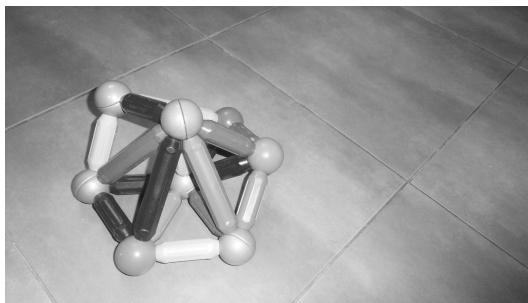


Figure 2: Une structure de barres et pivots en 3D. La théorie reste incomplète dans ce cas.

constitués d'alliages Germanium-Selenium [3, 4, 5, 6], en proportion respective x et $1 - x$. Un tel alliage est noté Ge_xSe_{1-x} . Dans la phase vitreuse, l'arrangement des atomes est irrégulier; néanmoins, chaque atome de Germanium forme toujours 4 liaisons et chaque atome de Selenium en forme 2. Les atomes de Germanium sont donc à l'origine de plus de contraintes de longueur et angulaires, et on peut imaginer que, de déformable pour x petit, la structure devienne rigide pour x plus grand.

L'exemple des verres covalents détaillé ci-dessus présente deux caractéristiques : le nombre de barres et de joints dans une structure peut-être gigantesque, au point qu'on ne peut espérer la décrire entièrement; l'organisation des liaisons dans un matériau vitreux n'est pas régulière, si bien qu'il est naturel de la représenter en utilisant une part d'aléatoire. Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à la rigidité sous cet angle probabiliste. La question posée alors n'est plus "est-ce que la structure dans son ensemble est rigide ou déformable", mais plutôt "est-ce qu'il existe une grande sous-structure rigide" ("grande" pouvant signifier par exemple "de taille comparable à la structure entière"), et "existe-t-il un seuil pour l'apparition de cette grande structure rigide ?" On étudie donc dans ce cas la "percolation de la rigidité" : ce concept est expliqué plus bas.

Je commence par poursuivre la description intuitive de la rigidité des structures de barres et de joints, remettant à plus tard définitions et théorèmes.

2 Comptage des contraintes

On attribue à James Clerk Maxwell [1] (connu avant tout par ses travaux sur l'électromagnétisme et la théorie cinétique des gaz) l'idée suivante, simple mais fondamentale : pour savoir si une structure est rigide ou déformable, il suffit en première approximation de compter les degrés de liberté et les contraintes. En deux dimensions, un pivot apporte deux degrés de liberté : en effet, sa position dans le plan est fixée par la donnée de ses deux coordonnées; et une barre apporte une contrainte : sa longueur est donnée et fixe la distance entre deux pivots. Par ailleurs, une structure rigide a trois degrés de liberté : deux translations et une rotation. Si on note n le nombre de pivots et m le nombre de barres, on obtient donc l'alternative (incorrecte, on va le voir) :

$$\begin{aligned} \text{Si } m < 2n - 3 & \quad \text{la structure est déformable} \\ \text{Si } m \geq 2n - 3 & \quad \text{la structure est rigide} \end{aligned}$$

Cette idée se généralise aux autres problèmes de rigidité : pour des barres et des joints en trois dimensions par exemple, il suffit de remplacer $2n - 3$ par $3n - 6$. Si les angles entre barres adjacentes sont fixées, il y a en trois dimensions $2m - 3$ contraintes angulaires autour d'un pivot relié à m barres. Il est donc

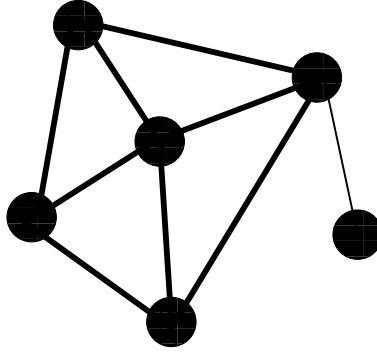


Figure 3: Un assemblage avec $n = 6$ boules et $m = 2n - 3$ barres, qui n'est pas rigide. On peut enlever n'importe laquelle des barres en trait épais sans modifier ses propriétés de rigidité.

possible de compter les degrés de liberté et les contraintes dans un alliage Ge_xSe_{1-x} avec n atomes :

$$\begin{aligned} \text{degrés de liberté} &= 3n \\ \text{contraintes de longueur} &= 2nx + n(1 - x) \\ \text{contraintes angulaires} &= 5nx + n(1 - x) \end{aligned}$$

En faisant le bilan, on conclut que le nombre de contraintes est supérieur au nombre de degrés de liberté si $x \geq 0.2$, et inférieur sinon. Cette théorie très simple est en partie confirmée par les expériences puisque des changements de propriétés du matériau sont détectés autour de la valeur critique $x = 0.2$ [6].

Le comptage des contraintes permet aussi de mettre en valeur une grande idée : décider de la rigidité d'une structure de barres et de joints est a priori un problème géométrique, ou de géométrie algébrique : on étudie les solutions d'un système d'équations polynomiales, exprimant que les barres ont une longueur fixée; or le comptage des contraintes le transforme en un problème de mathématiques discrètes, de théorie des graphes. Dans ce cas, c'est même un problème de théorie des graphes particulièrement simple : il suffit de compter les sommets (pivots) et les arêtes (barres). En réalité, le comptage des contraintes n'est pas correct, la Fig. 3 donne un contre-exemple; néanmoins, on va voir que dans certains cas, ce programme de réduction de la rigidité à un problème de théorie des graphes peut être mené à bien.

Pourquoi le comptage des contraintes ne fonctionne-t-il pas sur la structure de la figure 3 ? On voit que la structure contient une contrainte "redondante", que l'on peut enlever sans changer les déformations possibles. Si on enlève cette contrainte redondante, le comptage redevient correct. La question devient donc "comment identifier les contraintes redondantes ?" Clairement, si une structure contient n pivots et strictement plus que $2n - 3$ barres, elle contient au moins une contrainte redondante. On peut espérer que la réciproque soit vraie : si une structure contient une contrainte redondante, alors elle contient une sous structure avec n pivots et strictement plus que $2n - 3$ barres. C'est en effet une idée correcte pour les structures de barres et de pivots en deux dimensions, sous certaines hypothèses de généricité : c'est l'objet du célèbre théorème de Laman [2].

3 Théorème de Laman

On considère des graphes $G = (V, E)$, où $V = (v_1, \dots, v_n)$ (avec $n \geq 3$), et $E \subset V \times V$. V est l'ensemble des sommets du graphe, E l'ensemble des arêtes (toutes les arêtes sont distinctes, et une arête ne peut pas connecter un sommet à lui-même).

Une structure est une réalisation du graphe, c'est à dire la donnée du graphe et d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe un point du plan à chaque sommet du graphe; les longueurs des arêtes $(l_e)_{e \in E}$ sont alors fixées. La réalisation (G, φ) est rigide si les déplacements des sommets du graphe qui

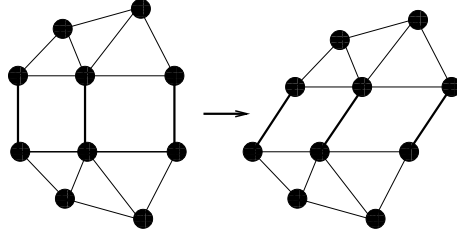


Figure 4: La structure représentée est associée à un graphe de Laman. On voit néanmoins qu'elle est déformable : la déformation représentée conserve la longueur de chaque barre, mais pas les distances entre chaque paire de sommets. Les 3 barres en gras sont parallèles, ce qui contredit l'hypothèse de généricité nécessaire pour appliquer le théorème de Laman.

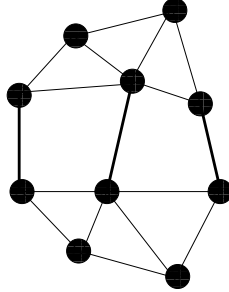


Figure 5: La structure représentée est associée au même graphe de Laman que la structure de la figure 4, mais elle satisfait l'hypothèse de généricité; elle est rigide.

préservent toutes les longueurs (l_e) préservent aussi toutes les distances entre sommets du graphe qui ne sont pas reliés par des arêtes.

Définition 3.1 *On appelle graphe de Laman un graphe G avec n sommets et $2n - 3$ arêtes, tel que tout sous-graphe de G contenant n' sommets contienne au plus $2n' - 3$ arêtes.*

Remarque 3.2 *Un graphe de Laman possède donc juste assez d'arêtes pour être rigide, et aucun sous-graphe avec "trop d'arêtes".*

Théorème 3.3 (Laman) *Un graphe de Laman admet une réalisation rigide.*

En fait, une réalisation "générique" d'un graphe de Laman est rigide, et une réalisation particulière peut ne pas l'être. Les figures 4 et 5 illustrent cet aspect. La figure 4 montre une structure associée à un graphe de Laman, contredisant l'hypothèse de généricité; elle est déformable. La figure 5 montre une structure associée au même graphe de Laman, mais satisfaisant l'hypothèse de généricité; elle est rigide. Une condition suffisante de généricité est que les coordonnées des pivots soient algébriquement indépendantes sur les rationnels.

La démonstration du théorème de Laman est assez élémentaire : elle repose sur la linéarisation des contraintes de longueurs, et des considérations d'algèbre linéaire.

Il peut sembler naturel de conjecturer des généralisations du théorème de Laman aux autres problèmes de rigidité : on sait que cela ne marche pas toujours, notamment dans le cas des structures de barres et de pivots en trois dimensions illustré par la figure 2.

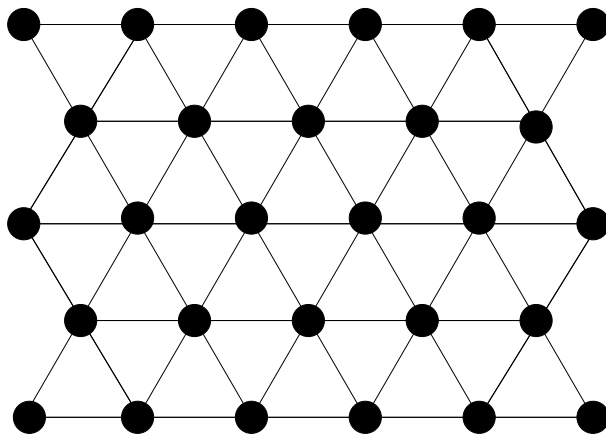


Figure 6: Un réseau triangulaire.

4 Percolation de la rigidité

4.1 Graphes aléatoire et percolation

On se place dorénavant dans le cadre de la rigidité générique : le théorème de Laman nous permet donc de transformer le problème originel en un problème de théorie des graphes.

Motivés notamment par les applications potentielles en physique, nous nous intéressons à de très grands graphes, dont la définition contient une part aléatoire.

Exemple 1 :

A partir du réseau triangulaire représenté sur la figure 6, on définit pour chaque $p \in [0, 1]$ un réseau aléatoire en associant à chaque arête une variable de Bernoulli de paramètre p ; ces variables sont indépendantes. Une arête est considérée comme “présente” si la variable associée vaut 1, et absente sinon.

Exemple 2 :

Un graphe aléatoire de type Erdős-Rényi, noté $\mathcal{G}(n, \frac{c}{n})$: c’est un graphe à n sommets, où chacune des $n(n-1)/2$ arêtes est présente avec probabilité c/n .

En percolation classique, on s’intéresse aux composantes connexes de ces graphes, dans la limite où la taille des graphes tend vers l’infini. Par exemple, on pose les questions : existe-t-il un seuil p^* (exemple 1) ou c^* (exemple 2) pour l’apparition d’une composante connexe comportant une fraction finie des sommets du graphe ? Cette composante connexe “géante” est-elle unique ? Dans ce cas, quelle est sa taille ?

Ici, on s’intéresse aux composantes rigides, et on pose les mêmes questions : existe-t-il un seuil p^* (exemple 1) ou c^* (exemple 2) pour l’apparition d’une composante rigide comportant une fraction finie des sommets du graphes ? Cette composante rigide “géante” est-elle unique ? Quelle est sa taille ? Par analogie avec la percolation classique, ce problème est appelé “percolation de la rigidité”.

4.2 Graphes aléatoires de type Erdős-Rényi

De façon peut-être un peu contre-intuitive, la percolation de la rigidité sur les graphes de type Erdős-Rényi est beaucoup plus abordable que sur des réseaux triangulaires (exemple 1). Récemment, Kaviswanathan, Moore et Thérán ont obtenu le résultat suivant (“avec grande probabilité” signifie “avec une probabilité qui tend vers 1 quand la taille du graphe n tend vers l’infini”) :

Théorème 4.1 *Il existe un seuil $c^* = 3.588\dots$ tel que :*

- Si $c < c^*$, alors avec grande probabilité les composantes rigides de $G(n, \frac{c}{n})$ contiennent 1, 2 ou 3 sommets.
- Si $c > c^*$, alors avec grande probabilité $G(n, \frac{c}{n})$ contient une unique composante rigide géante, de taille proportionnelle à n . De plus, la fraction de pivots appartenant à la plus grande composante rigide est discontinue en c^* ; on dit que la transition est du premier ordre.

La démonstration repose sur le lien entre rigidité et "orientabilité". Un graphe est dit k -orientable si il existe une orientation des arêtes telle que chaque site ait un degré entrant au plus k (i.e. au plus k arêtes sont orientées vers lui). On peut donner à cette procédure d'orientation des arêtes une interprétation physique : une arête retire un degré de liberté au site vers lequel elle est orientée; lorsque chaque site a deux degrés de liberté pour modéliser la rigidité en dimension 2, il est logique que rigidité et 2-orientabilité soient reliées. Kasiviswanathan et al. démontrent donc que le seuil au-delà duquel un graphe n'est plus 2-orientable coïncide avec le seuil d'apparition d'une composante rigide géante. La valeur de ce seuil $3.588\dots$ avait été calculée précédemment [19, 20], en analysant des algorithmes construisant une 2-orientation. Les démonstrations précises sont assez longues ([19, 20] sont des "résumés détaillés" omettant une partie des preuves).

En réalité, il s'agit d'une démonstration de résultats qui avaient été intuités par les physiciens il y a une quinzaine d'année [9, 10], grâce à l'utilisation de méthodes heuristiques, qui s'appuyaient sur le fait qu'un graphe $G(n, \frac{c}{n})$ ressemble localement à un arbre, et étudiaient la "propagation de la rigidité" dans cet arbre.

Il est instructif de détailler un peu cette heuristique. Notons $U_n^{(c)}$ la variable aléatoire qui compte dans un graphe $G(n, \frac{c}{n})$ le nombre de contraintes redondantes. On note $E_n^{(c)} = \mathbb{E}(U_n^{(c)})$. On cherche à étudier

$$e(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^{(c)}}{n}$$

On introduit maintenant un couplage entre $U_n^{(c)}$ et $U_{n+1}^{(c)}$. En partant d'un graphe G_n de loi $G(n, \frac{c}{n})$, on ajoute un sommet, et on le relie aux sommets de G_n avec probabilité c/n ; on retire ensuite chacune des arêtes avec probabilité $1/(n+1)$. Un peu de réflexion montre que le graphe G_{n+1} construit ainsi est de loi $G(n+1, \frac{c}{n+1})$. On note $\Delta U_{n,s}^{(c)}$ et $\Delta U_{n,a}^{(c)}$ les variables aléatoires qui comptent la variation du nombre de contraintes redondantes lors des processus d'addition de site ou de retrait d'arêtes utilisés ici. On a donc

$$U_{n+1}^{(c)} \text{ de même loi que } U_n^{(c)} + \Delta U_{n,s}^{(c)} + \Delta U_{n,a}^{(c)}$$

En prenant l'espérance

$$E_{n+1}^{(c)} - E_n^{(c)} = \mathbb{E}(\Delta U_{n,s}^{(c)}) + \mathbb{E}(\Delta U_{n,a}^{(c)})$$

En supposant que le membre de droite de la dernière équation a une limite quand n tend vers l'infini, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^{(c)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\Delta U_{n,s}^{(c)}) + \mathbb{E}(\Delta U_{n,a}^{(c)}))$$

On calcule maintenant les espérances de l'expression ci-dessus en utilisant le fait que les graphes $G(n, \frac{c}{n})$ ressemblent localement à des arbres. Ainsi, lorsqu'on ajoute par exemple une arête, on peut considérer sous certaines conditions que les 2 sommets qu'elle joint étaient "indépendants" avant l'adjonction de la nouvelle arête. Il est alors possible de calculer assez explicitement la fonction $e(c)$; on voit que $e(c) = 0$ si $c \leq c^* = 3.588\dots$, et $e(c) > 0$ si $c > c^*$.

Cette heuristique est un exemple d'utilisation de la très puissante "méthode de la cavité" [15], qui permet d'obtenir (sans preuve) des résultats beaucoup plus forts, par exemple des fonctions de grandes déviations pour la variable aléatoire $U_n^{(c)}$ [13, 14]. Malheureusement, les preuves données dans [19, 20] sont assez éloignées de l'heuristique des physiciens. Il est donc intéressant de noter que le récent article

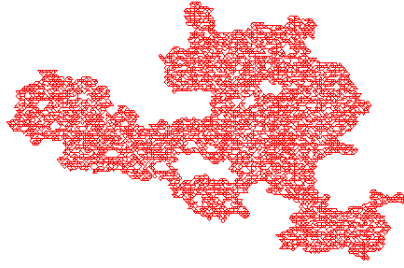


Figure 7: Une réalisation de la plus grande composante rigide dans un réseau triangulaire de taille 200x200; chaque arête est présente avec probabilité $p \simeq 0.656$, ce qui est proche du seuil de percolation de la rigidité, estimé numériquement.

[21] introduit une nouvelle preuve, beaucoup plus proche de l’heuristique donnée ci-dessus : les autres résultats en percolation de la rigidité utilisant la méthode de la cavité sont donc peut-être accessibles à une démonstration. Notons que la méthode de la cavité a permis aux physiciens d’étudier des problèmes bien plus difficiles que celui-ci (de type “verres de spin” par exemple [16]), et d’obtenir (répétons-le, sans preuve rigoureuse) de très nombreux résultats en optimisation combinatoire : rendre rigoureux ces raisonnements heuristiques est donc une question qui dépasse très largement le cadre de la rigidité [22].

4.3 Réseau triangulaire

En ce qui concerne le problème sur réseau triangulaire, la situation est beaucoup moins favorable. Quelques résultats ont été obtenus par A. Holroyd [17].

Théorème 4.2 (Holroyd) *On considère un réseau triangulaire infini, dans lequel chaque arête est présente avec probabilité p , les arêtes étant indépendantes. Alors il existe un seuil $p^* \in]0, 1[$ tel que :*

- i) Si $p < p^*$, avec probabilité 1 le réseau ne contient pas de composante rigide infinie.*
- ii) Si $p > p^*$, avec probabilité 1 le réseau contient une unique composante rigide infinie, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de p .*

Notons que ce théorème nécessite l’extension de la notion de rigidité à des structures infinies, et que la restriction étrange sur les valeurs de p dans le domaine $p > p^*$ est presque certainement un problème technique.

Malgré cette avancée, nous sommes encore extrêmement loin d’avoir une compréhension de la transition similaire à celle de la percolation standard, où “composante connexe” remplace “composante rigide”. Les physiciens ont réalisé des simulations numériques, qui semblent indiquer que la percolation de la rigidité en deux dimensions est “du deuxième ordre”, c’est à dire que la fraction de pivots appartenant à la plus grande composante rigide est certes une fonction singulière en p^* , mais continue. La transition est donc fondamentalement différente de celle sur graphe Erdős-Rényi, et très mal connue. La Fig. 7 montre un exemple de simulation sur réseau triangulaire.

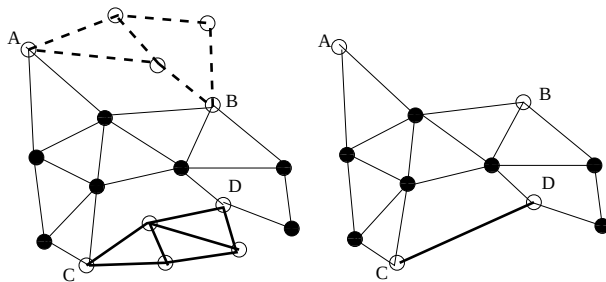


Figure 8: Les sous-graphes en tireté et en gras ont chacun une intersection avec le reste du graphe réduite à deux sommets. Par l'opération de renormalisation, le sous-graphe en gras est remplacé par une arête; le sous-graphe en tireté est simplement supprimé. On peut étudier la rigidité du graphe originel sur le graphe "renormalisé".

4.4 Renormalisation

Pour aller plus loin, nous allons utiliser une approche de type "renormalisation". L'idée est de transformer le problème de la rigidité sur une famille de graphes G décrits par une loi de probabilité $\mathcal{P}$ en un problème équivalent sur une famille de graphes plus petits, décrits par une loi de probabilité $\tilde{\mathcal{P}}$. On peut ensuite étudier la transformation $\mathcal{P} \mapsto \tilde{\mathcal{P}}$ et ses itérées successives pour comprendre le problème originel. Cette transformation est en général compliquée; on va analyser certains cas où elle est simple.

Considérons le graphe G , de la figure 8. Appelons H le sous graphe en tireté; son intersection avec le reste du graphe est réduite aux deux sommets A et B . Par ailleurs, si on considère le sous-graphe H tout seul, les sommets A et B n'appartiennent pas à la même composante rigide. Notons que A et B appartiennent à la même composante rigide dans G , mais pas dans H seul. On construit maintenant le graphe "renormalisé" $\tilde{G}$ de la façon suivante :

1. si A et B appartiennent à la même composante rigide dans H , on remplace tout le sous-graphe H par les sommets A , B et une arête les reliant;
2. si A et B n'appartiennent pas à la même composante rigide dans H , on supprime tout le sous-graphe H , sauf les sommets A et B : c'est le cas sur la figure 8
3. on ne touche pas au reste du graphe G

On peut renormaliser une nouvelle fois le graphe obtenu en considérant le sous-graphe en gras, dont l'intersection avec le reste du graphe est réduite aux sommets C et D . Le sous-graphe en gras est remplacé par les sommets C et D et une arête les reliant, comme indiqué figure 8.

Il n'est pas difficile de voir que les propriétés de rigidité du graphe G se transfèrent au graphe renormalisé $\tilde{G}$. En particulier, si I et J sont deux sommets de G qui ne sont pas dans H , I et J appartiennent à la même composante rigide dans G si et seulement si ils appartiennent à la même composante rigide dans $\tilde{G}$. On pourrait également relier le nombre de contraintes redondantes des graphes G et $\tilde{G}$. On peut donc maintenant étudier la rigidité du graphe plus petit, $\tilde{G}$. Bien sûr, cette procédure de "renormalisation" ne fonctionne que tant qu'on peut trouver des sous-graphes dont l'intersection avec le graphe principal est réduite à deux sites; elle ne permet donc pas de réduire la complexité du réseau de percolation triangulaire. En revanche, on peut raisonner dans l'autre sens : il est possible de construire un graphe de telle sorte que la procédure de renormalisation permette de résoudre complètement le problème ! Un exemple de tels graphes, appelés graphes hiérarchiques, est représenté figure 9; ces graphes ont été introduits à la fin des années 1970 pour étudier d'autres types de transitions de phase [18].

On met sur ce graphe hiérarchique une distribution des arêtes "de Bernoulli" : chaque arête est présente avec probabilité p , et les arêtes sont indépendantes entre elles. Pour une cellule élémentaire

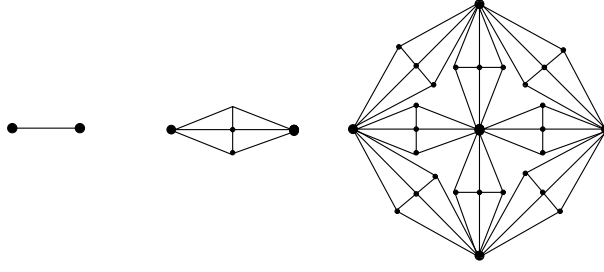


Figure 9: Construction d'un graphe hiérarchique : à chaque étape, chaque lien est remplacé par une "cellule élémentaire".

fixée, on note $R_{k,p}$ le graphe construit par distribution de Bernoulli de paramètre p sur le graphe hiérarchique de niveau k : il s'agit en fait d'une famille de graphes décrite par une loi de probabilité. On applique alors la procédure de renormalisation détaillée ci-dessus à chaque cellule de dernière génération de $R_{k,p}$. On fait assez facilement les constatations suivantes :

1. La procédure de renormalisation appliquée à chaque cellule élémentaire transforme un graphe hiérarchique de niveau k en un graphe hiérarchique de niveau $k - 1$.
2. Dans le graphe renormalisé, les arêtes sont indépendantes entre elles.
3. Chaque arête est présente sur le graphe renormalisé avec probabilité $\varphi(p)$, où φ est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui dépend de la cellule élémentaire; φ peut-être calculée explicitement sans difficulté.

On en conclut qu'une étape de renormalisation transforme la famille de graphes $R_{k,p}$ en la famille $R_{k-1,\varphi(p)}$. Dans ce cas particulier, la nouvelle loi de probabilité après renormalisation est très simple : le graphe conserve la même structure; les arêtes restent indépendantes; p est transformé en $\varphi(p)$.

Pour analyser un graphe $R_{k,p}$ avec k grand, on répète cette étape de renormalisation et on voit apparaître la suite récurrente $(p_t)_{t \in \mathbb{N}}$, qui décrit une probabilité "effective" de présence d'une arête à l'étape t :

$$p_0 = p ; p_{t+1} = \varphi(p_t)$$

Les propriétés de rigidité du graphe $R_{k,p}$ se lisent sur ce système dynamique très simple. En particulier, pour la cellule élémentaire de la Fig. 9, φ a deux points fixes stables $p = 0$ et $p = 1$, et un point fixe instable p^* ; p^* est un seuil :

- Si $p > p^*$, le graphe contient une composante rigide "géante" avec probabilité qui tend vers 1 quand k tend vers l'infini.
- Si $p < p^*$, le graphe ne contient pas de composante rigide géante probabilité qui tend vers 1 quand k tend vers l'infini.

De plus, les quantités reliées à la rigidité, comme le nombre de contraintes redondantes (ou plutôt l'espérance de ce nombre), présentent une singularité en $p = p^*$.

Notons que cette stratégie de renormalisation n'est pas limitée au problème de la rigidité des barres et des joints, mais fonctionne aussi sur d'autres problèmes de rigidité [23]; en revanche, de nouvelles idées sont nécessaires pour le cas du réseau triangulaire, ou pour d'autres réseaux réguliers.

5 Conclusion

J'espère avoir montré dans cet article que la compréhension de la percolation de la rigidité est très incomplète, et que le domaine comporte beaucoup plus de problèmes ouverts que de questions résolues : cet aspect devrait la rendre attirante pour les chercheurs, mathématiciens ou physiciens.

Pour conclure, j'ajouterai que la théorie de la rigidité en général est aussi un formidable terrain de vulgarisation scientifique et d'initiation à la recherche, pour tous niveaux : les questions posées sont simples et naturelles, le concept est accessible même pour de jeunes enfants, le comptage des contraintes au collège ou au lycée, et le théorème de Laman en Master, voire Licence.

Je remercie vivement J. Buzzi, T. Barbot et J. Melleray pour leur relecture très attentive, leurs nombreuses suggestions et leurs encouragements. Je remercie aussi tous mes collaborateurs passés et présents sur ce sujet passionnant.

References

- [1] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine* Series 4, Jan 1864.
- [2] G. Laman, *J. Eng. Math.* **4**, 331 (1970).
- [3] J.C. Phillips, *J. Non-Cryst. Solids* **34**, 153 (1979).
- [4] M.F. Thorpe, *J. Non-Cryst. Solids* **57**, 355 (1983).
- [5] H. He and M. F. Thorpe, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2107 (1985)
- [6] D. Selvanathan, W.J. Bresser and P. Boolchand, *Phys. Rev. B* **61**, 15061 (2000).
- [7] D.J. Jacobs and M.F. Thorpe, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4051 (1995).
- [8] C. Moukarzel and P.M. Duxbury, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4055 (1995).
- [9] C. Moukarzel, P. M. Duxbury and P. L. Leath, *Phys. Rev. E* **55**, 5800 (1997).
- [10] P.M. Duxbury, D.J. Jacobs, M.F. Thorpe and C. Moukarzel, *Phys. Rev. E* **59**, 2084 (1999).
- [11] L. Thérán, in Proc. of the 21st Canadian Conference on Computational Geometry, Vancouver, BC, 2009.
- [12] S. P. Kasiviswanathan, C. Moore and L. Thérán in SODA '11, 1237 (2011).
- [13] O. Rivoire and J. Barré *Phys. Rev. Lett.* **97**, 148701 (2006).
- [14] J. Barré, A. Bishop, T. Lookman and A. Saxena "Random bond models of the intermediate phase in network forming glasses" in "Rigidity and Boolchand intermediate phases in nanomaterials", Eds. M. Micoulaut, M. Popescu, INOE Publishing House (2009).
- [15] M. Mézard et G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **111**, 1 (2003).
- [16] M. Mezard, G. Parisi et M. A. Virasoro, "Spin glass theory and beyond", World Scientific (1987).
- [17] A. E. Holroyd, *The Annals of Applied Probability* **8**, 944 (1998).
- [18] A.N. Berker and S. Ostlund *J. Phys C* **12**, 4961 (1979).

- [19] D. Fernholz and V. Ramachandran, in SODA'07, 459 (2007).
- [20] J. A. Cain, P. Sanders, and N. Wormald, in SODA'07, 469 (2007).
- [21] M . Lelarge, in SODA '12, 251 (2012).
- [22] J. Salez, Quelques conséquences de la convergence locale faible pour les graphes aléatoires, thèse de doctorat (2011).
- [23] J. Barré, *J. Stat. Phys.* **146**, 359-377 (2012).
- [24] J. Barré, *Phys. Rev. E***80**, 061108 (2009).